UNIVERSIDADE FEDERAL DO ESPÍRITO SANTO

Centro de Ciências Exatas, Naturais e da Saúde - CCENS

Curso de Licenciatura em Física

Pedro Henrique Dalprá

Modificações na gravitação newtoniana

Alegre – ES

2025

Pedro Henrique Dalprá

Modificações na gravitação newtoniana

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Curso de Graduação em Física da Universidade Federal do Espírito Santo, *campus* Alegre, como requisito parcial para obtenção do título de Licenciado em Física.

Orientador: Júnior Diniz Toniato

Alegre – ES

2025

Pedro Henrique Dalprá

Modificações na gravitação newtoniana

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Curso de Graduação em Física da Universidade Federal do Espírito Santo, *campus* Alegre, como requisito parcial para obtenção do título de Licenciado em Física.

Trabalho aprovado em 28 de agosto de 2025.

COMISSÃO EXAMINADORA:

Documento assinado digitalmente
JUNIOR DINIZ TONIATO
Data: 01/09/2025 22:17:32-0300
Verifique em https://validar.iti.gov.br

Prof. Dr. Júnior Diniz Toniato
Departamento de Química e Física/UFES - Alegre
(Orientador)

Documento assinado digitalmente
JULIO CESAR FABRIS
Data: 01/09/2025 20:09:41-0300
Verifique em https://validar.iti.gov.br

Prof. Dr. Júlio César Fabris
Departamento de Física/UFES - Vitória

Prof. Dr. Santiago Esteban Perez Bergliaffa
Departamento de Física Teórica/UERJ

Agradecimentos

Primeiramente agradeço a Deus pela oportunidade de estar vivo e contemplar as belezas do universo.

Agradeço à minha família. Em especial minha mãe Maria e meu pai Nelson que me deram condições para seguir o caminho voltado ao conhecimento.

Ao professor Maurício, cujas aulas enquanto eu ainda estava no ensino médio me fascinaram e me incentivaram a seguir o caminho da Física.

Agradeço também ao meu orientador, professor Júnior, pelos conhecimentos transmitidos com muita paciência e disponibilidade.

Aos meus amigos Henrique, Fábio, Luiz e Rodolfo que contribuíram com conversas sinceras e companhia ao longo dessa jornada.

Igualmente à minha namorada Ingridy pelo carinho durante todos os momentos.

Agradeço ainda aos professores da UFES por ajudarem a iluminar a jornada da Física, em especial ao professor Guilherme por ministrar aulas de Física com uma didática sem precedentes e aos professores Átila e Willer pela companhia durante a jornada.

Por fim, agradeço à UFES e à CAPES pelo apoio financeiro por meio das bolsas concedidas durante a graduação, as quais foram essenciais para a minha permanência e continuidade nos estudos.

“Nós somos o que fazemos repetidamente. A excelência,
portanto, não é um ato, mas um hábito.”

— Aristóteles

Resumo

Este trabalho tem inicio com uma breve introdução abordando eventos marcantes na formulação das teorias gravitacionais. Na sequência apresenta-se uma revisão dos fundamentos da mecânica celeste à luz da mecânica newtoniana. Na terceira seção discute-se o impacto de uma classe de variações da teoria newtoniana e, por fim, se estabelece uma condição para que a teoria reproduza o dado observacional do avanço do periélio de Mercúrio.

Palavras-chave: teorias alternativas da gravitação; gravitação newtoniana modificada; testes gravitacionais; avanço do periélio de Mercúrio.

Lista de Figuras

1 Fluxo gravitacional. 15

2 Diagrama de $\vec{r}$ em coordenadas polares. 19

3 Diagrama de $\hat{\theta}$ em coordenadas polares. 19

4 Diagrama das possíveis trajetórias do problema de Kepler. 23

5 Diagrama de um avanço $d\theta$. 25

6 Novo referencial fixo. Fonte: [1, p. 151]. 28

7 Diagrama do problema Kepleriano perturbado por um terceiro corpo. . . . 30

Salvo indicação em contrário, todas as figuras apresentadas neste trabalho foram elaboradas pelo autor.

Sumário

1 Introdução **10**

1.1 Alguns sucessos da gravitação newtoniana 10

1.2 A inconsistência da gravitação newtoniana para Mercúrio 10

1.3 Teoria relativísticas modificadas 11

1.4 Revisão de literatura 12

1.5 Objetivos e justificativa 12

2 Revisão da Gravitação newtoniana **14**

2.1 Equações da gravitação newtoniana 14

2.1.1 A lei da gravitação universal 14

2.1.2 O potencial gravitacional 14

2.1.3 A aceleração gravitacional 15

2.1.4 A equação de Poisson 15

2.1.5 Massa inercial e massa gravitacional 17

2.2 O problema de Kepler 18

2.2.1 Equações de movimento na base vetorial 18

2.2.2 Equação de movimento 20

2.2.3 Movimento no tempo 22

2.2.4 O momento angular orbital 24

2.2.5 O sistema binário 25

2.3 Método das órbitas osculantes 27

2.3.1 Órbitas keplerianas no espaço 27

2.3.2 Aceleração perturbativa 28

2.3.3 O método 28

2.3.4 Equações osculantes 29

2.4 Perturbação por um terceiro corpo 30

3 Teoria newtoniana com G variável **36**

3.1 Lagrangiana newtoniana modificada 36

3.2 Equações de campo 37

3.3 Correções para o potencial newtoniano 37

3.3.1 Perturbação de primeira ordem 38

3.3.2 Perturbação de segunda ordem 39

3.3.3 Potencial gravitacional efetivo 39

3.4 A aceleração gravitacional modificada 41

3.4.1 Sistema binário 46

3.4.2 Variação dos elementos orbitais 47

3.4.3 Para a excentricidade orbital 47

3.4.4 Para o periélio orbital 48

3.4.5 Restrições observacionais 49

3.4.6 Previsão da Relatividade Geral 49

3.5 Aplicação a um modelo específico 50

4 Conclusão **52**

A Solução da EDO de Kepler **54**

B Simplificação da aceleração perturbativa **56**

C Código Wolfram Mathematica **58**

D Lagrangiana modificada **59**

E Análise perturbativa **61**

F O Laplaciano **65**

1 Introdução

A mecânica newtoniana é considerada uma revolução para a física e ciências. Prova disso são os inúmeros avanços tecnológicos que surgiram ao longo dos cerca de 300 anos de reinado da chamada física clássica, toda baseada no arcabouço teórico introduzido por Newton. Até mesmo após o advento da relatividade especial, outra formulação da mecânica que também revolucionou a ciência mundial, a física newtoniana continua sendo base satisfatória para os estudos de muitos sistemas físicos.

No campo da gravitação, não foi diferente. A teoria da gravitação universal, já introduzida no trabalho seminal de Newton, os Principia, é um modelo teórico que satisfatoriamente explica os fenômenos a nível do Sistema Solar. Mais do que isso, a gravitação newtoniana também colecionou resultados que permitiram novas descobertas.

1.1 Alguns sucessos da gravitação newtoniana

Edmund Halley, recorrendo às equações formuladas por Isaac Newton, apontou que os cometas observados nos anos de 1531, 1607 e 1682 não eram corpos distintos, mas sim manifestações recorrentes de um mesmo astro que orbita o Sol com um período aproximado de 75 a 76 anos. Sua conjectura foi posteriormente corroborada pelas estimativas de Alexis Clairaut, que conseguiu prever o retorno do cometa no ano de 1759 [1].

Urbain Le Verrier e, de forma independente, John Adams apontaram que certas irregularidades observadas na órbita de Urano poderiam ser explicadas pela influência gravitacional de um planeta ainda desconhecido. Em 1846, apenas um dia após receberem a previsão de Le Verrier para sua posição, astrônomos alemães localizaram o novo planeta que agora é chamado de Netuno [1].

Outros sucessos da teoria newtoniana podem ser encontrados, por exemplo, nas referências [2] e [3].

1.2 A inconsistência da gravitação newtoniana para Mercúrio

Por volta do meio do século XIX, os astrônomos constataram que o periélio de Mercúrio - o ponto de sua órbita em que o planeta se encontra mais próximo do Sol - apresentava um deslocamento progressivo ao longo do tempo, avançando a uma taxa de 574,1 segundos de arco por século. De acordo com a dinâmica de dois corpos descrita por Kepler, o periélio deveria permanecer fixo. No entanto, parecia claro que o avanço deveria ser causado pela

influência gravitacional dos outros planetas, que perturbariam ligeiramente a órbita de Mercúrio [1].

Le Verrier calculou a contribuição de cada planeta para o avanço do periélio, porém os resultados apresentavam uma discrepância de 42,9 segundos de arco por século, que não podia ser explicada pelas interações conhecidas. Inspirado pelo sucesso de Netuno, Le Verrier e outros apoiaram a existência de um outro planeta entre Mercúrio e o Sol, que provisoriamente recebeu o nome de Vulcano. Apesar de diversas buscas sistemáticas, nenhuma evidência desse planeta foi encontrada [1].

O problema persistiu por décadas e a solução se mostraria muito mais exótica do que se poderia imaginar à época. Após alguns anos de trabalho na busca por uma teoria gravitacional consistente com as leis da relatividade restrita e a colaboração de vários grandes cientistas como Marcel Grossmann, Gunnar Nordström, Adriaan Fokker, Max Abraham e outros, Einstein construiu a primeira teoria relativística da gravitação e consistente com os dados observacionais da variação do periélio de Mercúrio.

> A resolução do problema de Mercúrio já é lendária. O local é Berlim, novembro de 1915. Albert Einstein, usando as novas equações da relatividade geral, calcula o movimento de Mercúrio e demonstra que as leis relativísticas do movimento orbital explicam a notória discrepância. Einstein ficou radiante e, mais tarde, escreveu a um amigo que essa descoberta lhe causou palpitações cardíacas [1, p. 139, tradução nossa].

1.3 Teoria relativísticas modificadas

A teoria da relatividade geral de Albert Einstein consolidou-se como teoria dominante para descrever a interação gravitacional, por explicar com notável precisão diversos fenômenos gravitacionais. Desde sua formulação, a teoria tem sido submetida a inúmeros testes observacionais, superando-os com sucesso e reafirmando sua validade [4].

Apesar de seu sucesso, teorias alternativas têm sido estudadas na esperança de refinar ou ampliar nossa compreensão de gravidade. Uma alternativa notável é a teoria de Brans-Dicke, proposta como uma forma de incorporar um acoplamento gravitacional variável (a constante gravitacional) que, em certos limites, retorna à relatividade geral [4] que, por sua vez, possui um limite onde a gravitação newtoniana é também recuperada.

Mas muitas teorias gravitacionais relativísticas podem ter limites clássicos diferentes de uma teoria newtoniana, e é sobre esse cenário que este trabalho é construído: como introduzir modificações na gravitação newtoniana que possam incorporar efeitos trazidos

por teorias relativísticas alternativas?

1.4 Revisão de literatura

Mesmo após a consolidação da relatividade geral e das teorias relativísticas da gravitação, propostas de modificações da gravitação newtoniana já foram discutidas na literatura.

A referência [5] apresenta uma proposta de modificação diretamente na lei de força gravitacional, incorporando a constante de Rydberg R. Já a referência [6] discute uma modificação na lagrangiana newtoniana abarcando termos como ∇^2 - esse tipo de modificação leva a equações de campo de ordem superior. Em direção à abordagem empregada neste trabalho, a referência [7] propõe uma extensão da lagrangiana newtoniana incluindo um campo escalar focado em aplicações na cosmologia. Em continuidade, um trabalho mais recente dos mesmos autores apresenta, na referência [8], um estudo interessado nas propriedades físicas de estrelas sob tal modificação. Finalmente, a referência [4] - que serviu de inspiração para este estudo - analisa em que condição a lagrangiana newtoniana modificada corresponde aos dados observacionais do avanço do periélio de Mercúrio.

Dentro dessa perspectiva, formulamos a seguir os objetivos e justificativa do trabalho.

1.5 Objetivos e justificativa

Este trabalho tem como objetivo estudar efeitos de modificações na gravitação newtoniana que sejam consistentes com os dados observacionais do avanço do periélio de Mercúrio. Dentro dessa questão abrangente, os seguintes objetivos específicos surgem:

- Revisar a lagrangiana e as derivações das equações de campo gravitacional newtoniano, o sistema binário e sua perturbação por um terceiro corpo para estudar a variação do periélio orbital.
- Análise de modelos com lagrangianas mais gerais, estendendo a proposta da ref. [7], com obtenção das equações de campo e estudo perturbativo para campos fracos.
- Comparar a teoria modificada com os dados observacionais, a fim de determinar os parâmetros que tornem o modelo consistente com as observações.

A relevância do estudo que se propõe é justificado de algumas maneiras: *i*) buscar uma modificação da gravitação newtoniana é importante para compatibilização com as modernas teorias gravitacionais relativísticas; *ii*) uma teoria gravitacional newtoniana que

incorpore possíveis efeitos típicos de teorias relativísticas ainda é conceitualmente e matematicamente mais simples para análises numéricas de alguns sistemas complexos com recurso computacional; e *iii*) é suficiente para estudos de muitos problemas astrofísicos e cosmológicos onde o campo gravitacional é fraco, como a dinâmica de galáxias, por exemplo [4].

2 Revisão da Gravitação newtoniana

2.1 Equações da gravitação newtoniana

2.1.1 A lei da gravitação universal

A *lei da gravitação universal* estabelece que um corpo pontual de massa M exerce sobre outro corpo pontual de massa m uma força atrativa $\vec{F}_g$ que varia inversamente com o quadrado da distância r entre os corpos. Em linguagem matemática:

$$\vec{F}_g = -\frac{GMm}{r^2}\hat{r}, \tag{1}$$

onde

$$G = 6,673 \times 10^{-11}\ m^2 kg^{-1} s^{-2} \tag{2}$$

é a constante gravitacional newtoniana, determinada experimentalmente pelo físico inglês Henry Cavendish em 1798 [9].

2.1.2 O potencial gravitacional

Sendo $\vec{F}_g$ um campo vetorial conservativo[1] ($r \neq 0$), uma forma alternativa para $\vec{F}_g$ é escreve-lá como o gradiente de um potencial [1]:

$$\vec{F}_g = m\vec{\nabla}U, \tag{3}$$

onde

$$U = \frac{GM}{r} \tag{4}$$

é o potencial gravitacional newtoniano.[2]

Do ponto de vista físico, a grandeza relevante é a força. No entanto, em alguns problemas, lidar diretamente com vetores pode ser um desafio. Nessas situações, o uso do potencial - uma grandeza escalar - se torna uma abordagem vantajosa para determinar a força de uma forma mais simples [9].

[1] Isto é, $\vec{\nabla} \times \vec{F}_g = 0$.

[2] Estamos definindo o potencial U como o negativo do potencial newtoniano tradicional, para seguirmos a notação matemática usual de análise pós-newtonianas. Na prática, isso apenas mudaria a definição da energia mecânica de uma partícula como sendo a *subtração* entre sua energia cinética e potencial gravitacional.

2.1.3 A aceleração gravitacional

Ao comparar a equação (3) com a *segunda lei de Newton*:

$$\vec{F} = m\vec{a}, \tag{5}$$

é possível obter uma expressão para a aceleração gravitacional $\vec{g}$, onde

$$\vec{g} = \vec{\nabla} U, \tag{6}$$

de modo que

$$\vec{g} = -\frac{GM}{r^2}\hat{r} \tag{7}$$

é a aceleração gravitacional newtoniana.

2.1.4 A equação de Poisson

Podemos determinar um fluxo gravitacional Φ através de uma superfície S:

$$\Phi = \int_S \vec{g} \cdot d\vec{A}, \tag{8}$$

onde $d\vec{A}$ é o vetor normal à superfície.

Se considerarmos o campo gravitacional $\vec{g}$ gerado por uma partícula de massa M e adotando uma superfície esférica S_e de integração de raio r, temos

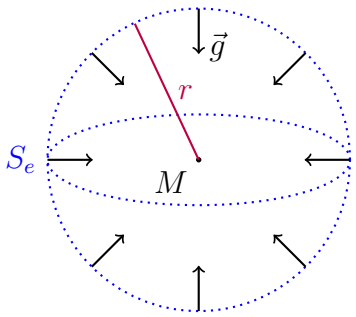


Figura 1: Fluxo gravitacional.

$$\Phi = \oint_{S_e} g \cos\theta dA, \tag{9}$$

o ângulo θ formado entre $\vec{g}$ e $d\vec{A}$ em qualquer ponto da superfície é π, de forma que

$$\Phi = -g \oint_{S_e} dA \tag{10}$$

e a integral resulta na área da esfera, portanto

$$\Phi = -g(4\pi r^2), \tag{11}$$

substituindo $g = GM/r^2$, encontramos

$$\Phi = -\frac{GM}{r^2}(4\pi r^2) = -4\pi GM. \tag{12}$$

O resultado acima mostra que o fluxo gravitacional depende unicamente da massa contida na superfície, a qual é sempre positiva. Diferentemente do que ocorre no eletromagnetismo - em que as cargas podem ser positivas ou negativas, originando forças tanto de atração quanto de repulsão - a gravidade se manifesta apenas como força atrativa [3].

Pelo *teorema da divergência de Gauss*, temos

$$\int_S \vec{g} \cdot d\vec{A} = \int_V \vec{\nabla} \cdot \vec{g}\, dV = -4\pi GM. \tag{13}$$

Podemos generalizar a equação acima considerando uma distribuição contínua de matéria, escrevendo a massa como sendo a integral da densidade, tal que

$$\begin{aligned} \int_V \vec{\nabla} \cdot \vec{g}\, dV &= -4\pi G \int_V \rho\, dV \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{g} &= -4\pi G\rho, \end{aligned} \tag{14}$$

substituindo $\vec{g} = \vec{\nabla} U$,

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} U &= -4\pi G\rho \\ \nabla^2 U &= -4\pi G\rho, \end{aligned} \tag{15}$$

onde ρ é a densidade de matéria e a equação acima é a *equação de Poisson* para gravitação newtoniana.

A equação de Poisson mostra como se comporta o campo gravitacional newtoniano dada uma densidade de matéria. Note que por ser uma equação diferencial, ela atua pontualmente no espaço. E na ausência de matéria, temos [3]

$$\nabla^2 U = 0, \tag{16}$$

conhecida como *equação de Laplace*.

2.1.5 Massa inercial e massa gravitacional

A maioria dos livros de graduação dão início à seção sobre gravitação enunciando as equações acima, tal como foi feito, sem estabelecer uma diferença clara entre as massas das equações (3) e (5). No entanto, na equação (5), a massa m que aparece refere-se à massa inercial m_I do corpo, ou seja, a soma de todas as contribuições de massas de seus constituintes. Esta massa é uma medida da resistência do corpo a ser acelerado e é completamente independente da particularidade das interações envolvidas. Já na equação (1), que descreve uma força de natureza gravitacional, m deve corresponder à capacidade do corpo de resistir à aceleração provocada por uma interação gravitacional. Isso é o que se chama de massa gravitacional passiva, m_G. A massa gravitacional ativa está relacionada com a propriedade intrínseca de um corpo em produzir potencial/força gravitacional. Essa é a massa M que aparece no potencial newtoniano (4) [1].

Newton já reconhecia a importância da massa inercial e da massa gravitacional passiva serem equivalentes, isso é: $m_I = m_G$. Essa igualdade permite que corpos diferentes sejam acelerados igualmente em um mesmo campo gravitacional, respeitando inclusive o *princípio da equivalência fraca* de Einstein. Assim, uma maneira útil de discutir essa equivalência é pensando justamente na violação da igualdade mencionada [1]:

$$m_G = m_I(1+\eta), \tag{17}$$

onde η é um parâmetro adimensional que mede a diferença das massas.

Com essa nova notação, podemos escrever a aceleração de uma partícula na presença de um campo gravitacional como:

$$\begin{aligned} \vec{F} &= \vec{F}_g \\ m_I\vec{a} &= -\frac{GMm_G}{r^2}\hat{r} \\ \vec{a} &= -\frac{m_G}{m_I}\frac{GM}{r^2}\hat{r} \end{aligned} \tag{18}$$

usando a violação da equivalências das massas, temos

$$\vec{a} = -(1+\eta)\frac{GM}{r^2}\hat{r}. \tag{19}$$

Inúmeros testes experimentais foram realizados, cuja essência era verificar se corpos diferentes caiam em um mesmo campo gravitacional com diferentes acelerações. Um teste importante foi realizado utilizando o sistema Terra-Lua. Os dois corpos têm composições ligeiramente diferentes: a Terra dispõe de um núcleo de ferro-níquel e a Lua é dominada

por silicatos. Se houvesse de fato uma violação da equivalência das massas, os dois corpos cairiam com diferentes acelerações em direção ao Sol: isso afetaria a órbita Terra-Lua [1].

> O alcance a *laser* lunar é uma técnica de reflexão de feixe de *lasers* em refletores colocados na superfície lunar durante os programas de pouso lunar americano e soviético na década de 1970, e atingiu a capacidade de medir a distância Terra-Lua em níveis subcentimétricos. Nenhuma evidência de tal perturbação na distância Terra-Lua foi encontrada [1, p. 5, tradução nossa.].

Na verdade, nenhum teste apresentou uma violação significativa na igualdade entre as massas inercial e gravitacional [1].

2.2 O problema de Kepler

Um dos problemas mais simples da mecânica celeste é determinar o movimento de dois corpos sujeitos a atração gravitacional mútua, considerando que cada corpo é esfericamente simétrico. Esse também é um dos problemas mais relevantes, visto que em uma primeira boa aproximação, o movimento de qualquer planeta em torno do Sol pode ser calculado ignorando os efeitos dos outros planetas. Esse tipo de sistema binário recebe o nome de problema de dois corpos ou problema de Kepler [1].

2.2.1 Equações de movimento na base vetorial

Para descrever o problema de Kepler, é conveniente adotar o sistema de coordenadas polares. Nesse contexto, defini-se o vetor posição $\vec{r}$ de um ponto no plano como:

$$\begin{aligned} \vec{r} &\equiv (r\cos\theta, r\sin\theta, 0) \\ &= r\hat{r}, \end{aligned} \tag{20}$$

onde

$$\hat{r} = (\cos\theta, \sin\theta, 0), \tag{21}$$

considerando que tanto a distância r quanto o ângulo θ dependem do tempo (veja figura 2).

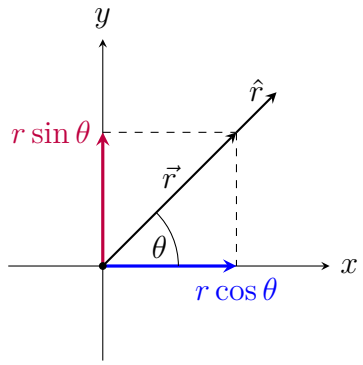


Figura 2: Diagrama de $\vec{r}$ em coordenadas polares.

A partir dessa definição, podemos escrever os vetores velocidade $\vec{v}$ e aceleração $\vec{a}$ em relação à base de vetores definida. O ponto sobrescrito indicará diferenciação temporal, ou seja

$$\dot{r} = \frac{dr}{dt}. \tag{22}$$

Assim, segue que

$$\begin{aligned} \vec{v} &= \frac{d\vec{r}}{dt} \\ &= \frac{d(r\hat{r})}{dt} \\ &= \dot{r}\hat{r} + r\dot{\hat{r}} \\ &= \dot{r}\hat{r} + r\dot{\theta}\hat{\theta} \end{aligned} \tag{23}$$

de modo que

$$\hat{\theta} = \frac{d\hat{r}}{d\theta} = (-\sin\theta, \cos\theta, 0), \tag{24}$$

veja figura 3.

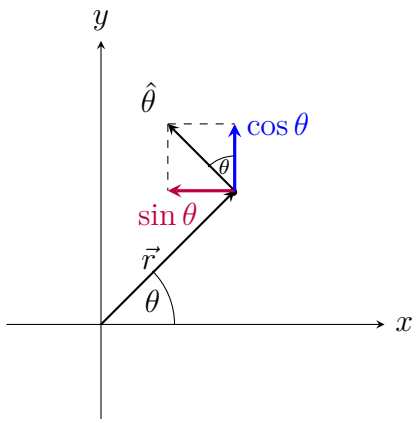


Figura 3: Diagrama de $\hat{\theta}$ em coordenadas polares.

Repare que ao derivar as funções que dependem de θ, precisamos derivar também θ, fazendo uso da regra da cadeia uma vez que θ depende do tempo. Por isso, quando deriva-se $\hat{r}$ aparece o termo $\dot{\theta}\hat{\theta}$.

Por fim

$$\begin{aligned}
\vec{a} &= \frac{d\vec{v}}{dt} \\
&= \frac{d}{dt}(\dot{r}\hat{r} + r\dot{\theta}\hat{\theta}) \\
&= \ddot{r}\hat{r} + \dot{r}\dot{\theta}\hat{\theta} + \dot{r}\dot{\theta}\hat{\theta} + r\ddot{\theta}\hat{\theta} - r\dot{\theta}^2\hat{r} \\
&= \ddot{r}\hat{r} + 2\dot{r}\dot{\theta}\hat{\theta} + r\ddot{\theta}\hat{\theta} - r\dot{\theta}^2\hat{r} \\
&= (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\hat{r} + \frac{1}{r}\frac{d}{dt}(r^2\dot{\theta})\hat{\theta}. \qquad (25)
\end{aligned}$$

2.2.2 Equação de movimento

Vamos, inicialmente, considerar uma versão simplificada do problema de Kepler, tratando um planeta como uma partícula teste se movendo sob influência do campo gravitacional do Sol. Assim, de acordo com a segunda lei de Newton, o planeta se move com uma aceleração $\vec{g}$. Igualando essa aceleração gravitacional newtoniana com a aceleração em coordenadas polares,

$$\begin{aligned}
\vec{g} &= \vec{a} \\
-\frac{GM}{r^2}\hat{r} &= (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\hat{r} + \frac{1}{r}\frac{d}{dt}(r^2\dot{\theta})\hat{\theta}. \qquad (26)
\end{aligned}$$

Imediatamente implica que

$$\begin{aligned}
\frac{1}{r}\frac{d}{dt}(r^2\dot{\theta})\hat{\theta} &= 0 \\
\frac{d}{dt}(r^2\dot{\theta}) &= 0 \\
r^2\dot{\theta} &= \text{constante}. \qquad (27)
\end{aligned}$$

Por conveniência, defini-se essa constante do movimento de h:

$$r^2\dot{\theta} \equiv h. \qquad (28)$$

Usando esse resultado na componente radial da equação (26), chega-se, portanto, na equação diferencial de segunda ordem:

$$\ddot{r} - r\dot{\theta}^2 = -\frac{GM}{r^2}. \tag{29}$$

$$\ddot{r} - \frac{h^2}{r^3} = -\frac{GM}{r^2}. \tag{30}$$

Com objetivo de simplificar a equação acima, a variável r é redefinida conforme segue:

$$r \equiv \frac{1}{u}, \tag{31}$$

dando origem a

$$\begin{aligned} \dot{r} &= -\frac{\dot{u}}{u^2} \\ &= -\frac{1}{u^2}\frac{du}{d\theta}\dot{\theta} \\ &= -h\frac{du}{d\theta} \end{aligned} \tag{32}$$

e

$$\begin{aligned} \ddot{r} &= -h\frac{d^2u}{d\theta^2}\dot{\theta} \\ &= -h^2u^2\frac{d^2u}{d\theta^2}. \end{aligned} \tag{33}$$

Essa redefinição é útil para descrever a posição em relação ao ângulo e não em relação ao tempo: isso dará uma descrição geométrica da órbita. A descrição do movimento em relação ao tempo será tratada mais adiante [1].

Considere

$$u' \equiv \frac{du}{d\theta}, \tag{34}$$

e podemos escrever a equação diferencial (30) como:

$$\begin{aligned} -h^2u^2u'' - h^2u^3 &= -GMu^2 \\ -h^2u'' - h^2u &= -GM \\ -u'' - u &= -\frac{GM}{h^2} \\ u'' + u &= \frac{GM}{h^2}, \end{aligned} \tag{35}$$

cuja solução é a equação da seção cônica (maiores detalhes sobre a solução podem ser encontrados no Apêndice A):

$$r(\theta) = \frac{p}{1 + e\cos(\theta - \omega)}, \tag{36}$$

onde e é a excentricidade, ω é uma constante arbitrária e $p \equiv h^2/(GM)$ é conhecido como *semi-latus rectum*. Como r representa a distância da curva até um ponto chamado Foco, conclui-se que esse é o ponto onde está localizado o Sol.

Quando $\theta = \omega$, r atinge um valor mínimo:

$$r_{min} = \frac{p}{1 + e}, \tag{37}$$

esse ponto é chamado de *pericentro*. No caso específico de órbitas ao redor do Sol, ele é chamado de *periélio* [1]. Observe que se $0 < e < 1$, recuperamos a *primeira lei de Kepler* que afirma que os planetas se movem em trajetórias elípticas ao redor do Sol. E que se $\theta = \omega$ é o periélio, então o ponto de maior separação é quando $\theta = \omega + \pi$ [1]:

$$r_{max} = \frac{p}{1 - e}, \tag{38}$$

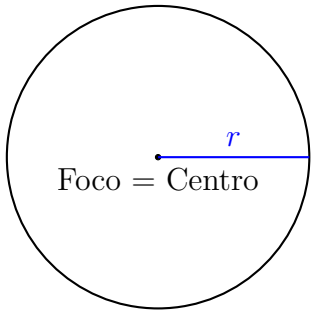
esse ponto é chamado de *apocentro*. No caso específico de órbitas ao redor do Sol, ele é chamado de *afélio*. A noção de apocentro deixa de ter significado quando as trajetórias são parabólicas ou hiperbólicas, pois $r_{max} \to \infty$ [1].

O tipo de trajetória orbital depende do valor de e e suas possibilidades estão ilustradas na Figura 4.

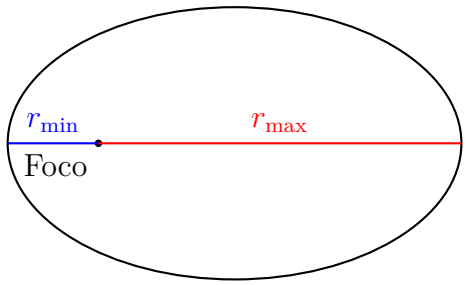
2.2.3 Movimento no tempo

Derivando a solução de Kepler, equação (36), no tempo, obtemos uma expressão para a velocidade radial:

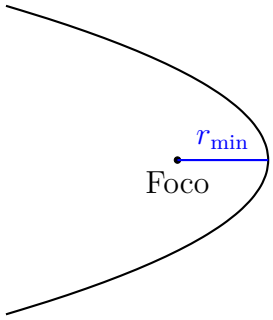
$$\begin{aligned}
\dot{r} &= \frac{d}{dt}\left(\frac{p}{1 + e\cos(\theta - \omega)}\right) \\
&= \frac{d}{d\theta}\left(\frac{p}{1 + e\cos(\theta - \omega)}\right)\dot{\theta} \\
&= -\frac{p}{[1 + e\cos(\theta - \omega)]^2}[-e\sin(\theta - \omega)]\dot{\theta}
\end{aligned}$$



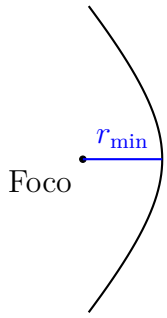
(a) Trajetória circular com $e = 0 \Rightarrow r = p$.



(b) Trajetória elíptica com $0 < e < 1$.



(c) Trajetória parabólica com $e = 1$.



(d) Trajetória hiperbólica com $e > 1$.

Figura 4: Diagrama das possíveis trajetórias do problema de Kepler.

lembrando que $h = r^2\dot{\theta} \Rightarrow \dot{\theta} = h/r^2$, podemos substituir $\dot{\theta}$ na expressão anterior, resultando em

$$\begin{aligned}
\dot{r} &= \frac{p}{[1 + e\cos(\theta - \omega)]^2} e \sin(\theta - \omega) \frac{h}{r^2} \\
&= \frac{p}{[1 + e\cos(\theta - \omega)]^2} e \sin(\theta - \omega) \frac{h}{\frac{p^2}{[1+e\cos(\theta-\omega)]^2}} \\
&= \frac{h}{p} e \sin(\theta - \omega)
\end{aligned}$$

por fim, lembrando que $p = h^2/(GM) \Rightarrow h = \sqrt{GMp}$, então substituímos h na expressão acima e encontramos

$$\begin{aligned}
\dot{r} &= \frac{\sqrt{GMp}}{p} e \sin(\theta - \omega) \\
&= \sqrt{\frac{GM}{p}} e \sin(\theta - \omega).
\end{aligned} \tag{39}$$

Agora o interesse está em determinar a velocidade angular. Foi visto que:

$$\dot{r} = \frac{d}{d\theta}\left(\frac{p}{1 + e\cos(\theta - \omega)}\right)\dot{\theta}, \tag{40}$$

isolando $\dot{\theta}$ e usando o resultado de $\dot{r}$, somos conduzidos a

$$\begin{aligned}
\dot{\theta} &= \frac{\dot{r}}{\left[\frac{d}{d\theta}\left(\frac{p}{1+e\cos(\theta-\omega)}\right)\right]} \\
&= \left[\sqrt{\frac{GM}{p}}e\sin(\theta-\omega)\right]\left\{\frac{[1+e\cos(\theta-\omega)]^2}{pe\sin(\theta-\omega)}\right\} \\
&= \sqrt{\frac{GM}{p^3}}[1+e\cos(\theta-\omega)]^2. \qquad (41)
\end{aligned}$$

Para obter informações do período de uma órbita, seguimos os seguintes passos:

$$\begin{aligned}
\frac{d\theta}{dt} &= \sqrt{\frac{GM}{p^3}}[1+e\cos(\theta-\omega)]^2 \\
dt &= \sqrt{\frac{p^3}{GM}}\frac{d\theta}{[1+e\cos(\theta-\omega)]^2} \\
\int_T^t dt &= \sqrt{\frac{p^3}{GM}}\int_\omega^\theta \frac{d\theta}{[1+e\cos(\theta-\omega)]^2}
\end{aligned}$$

cuja solução é (veja referência [1, p. 147]):

$$t - T = \sqrt{\frac{a^3}{GM}}(u - e\sin u), \qquad (42)$$

onde $a \equiv p/(1-e^2)$ é o semi-eixo maior, e representa essencialmente a distância média do planeta ao Sol; $f \equiv \theta - \omega$ e $\sin u \equiv \sqrt{1-e^2}\sin f/(1+e\cos f)$.

Ao percorrer uma órbita completa ($u = 2\pi$), temos:

$$P = 2\pi\sqrt{\frac{a^3}{GM}} \qquad (43)$$

revelando a *terceira lei de Kepler* que diz que o período P de uma órbita planetária é proporcional a $a^{3/2}$ [1].

2.2.4 O momento angular orbital

O momento angular $\vec{L}$ de uma partícula é definido como:

$$\vec{L} \equiv \vec{r} \times \vec{p}, \qquad (44)$$

onde $\vec{r}$ é a posição e $\vec{p} = m\vec{v}$ é o momento linear. Dessa forma,

$$\begin{aligned}\vec{L} &= m\vec{r} \times \vec{v} \\ &= m(r\hat{r}) \times (\dot{r}\hat{r} + r\dot{\theta}\hat{\theta}) \\ &= mr^2\dot{\theta}\hat{k}. \end{aligned} \tag{45}$$

No problema de Kepler, verificamos que $r^2\dot{\theta} \equiv h$ é uma constante. Isso indica que o momento angular é conservado ao longo do tempo. Como consequência, a órbita permanece em um mesmo plano orbital, sem sofrer variações na sua orientação espacial [1].

Agora considere um avanço muito pequeno $d\theta$ na trajetória, a ponto de se poder considerar o setor circular formado como um triângulo (veja figura abaixo).

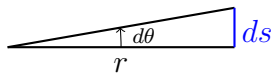


Figura 5: Diagrama de um avanço $d\theta$.

A área A do triângulo é igual a:

$$\begin{aligned} A &= \frac{r.ds}{2} \\ &= \frac{r(rd\theta)}{2} \\ &= \frac{r^2 d\theta}{2}. \end{aligned} \tag{46}$$

Portanto, a taxa com que a área é varrida é constante.

$$\begin{aligned} \frac{dA}{dt} &= \frac{r^2}{2}\frac{d\theta}{dt} \\ &= \frac{h}{2}. \end{aligned} \tag{47}$$

Esse resultado exprime a *segunda lei de Kepler* que diz que o raio-vetor que liga o Sol a um planeta varre áreas iguais em intervalos de tempo iguais.

2.2.5 O sistema binário

Uma análise menos simplista do problema de Kepler é, ao invés de tratar o planeta como uma partícula teste orbitando o Sol, considerar também a influência gravitacional do

planeta sobre o Sol, ou seja, um verdadeiro problema de dois corpos. No entanto, se analisado a partir do ponto de vista do centro de massa do sistema, mostra-se que o problema se reduz a um problema efetivo de uma partícula de massa reduzida orbitando o centro de massa [3]. Mostraremos isso a seguir.

O vetor posição do centro de massa $\vec{r}_{CM}$ de um sistema de dois corpos é dado por

$$\vec{r}_{CM} = \frac{m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2}{m_1 + m_2}. \tag{48}$$

Se tomarmos um referencial com a origem no centro de massa, então

$$\vec{r}_{CM} = 0 \qquad \Rightarrow \qquad m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2 = 0. \tag{49}$$

De forma que a aceleração relativa $\ddot{\vec{r}}$ das massas é expressada como

$$\begin{aligned}
\ddot{\vec{r}} &= \ddot{\vec{r}}_1 - \ddot{\vec{r}}_2 \\
&= \ddot{\vec{r}}_1 + \ddot{\vec{r}}_1\frac{m_1}{m_2} \\
&= \ddot{\vec{r}}_1\left(1 + \frac{m_1}{m_2}\right) \\
&= \ddot{\vec{r}}_1\left(\frac{m_1 + m_2}{m_2}\right).
\end{aligned} \tag{50}$$

Adotando que $m = m_1 + m_2$

$$\ddot{\vec{r}} = \ddot{\vec{r}}_1\left(\frac{m}{m_2}\right). \tag{51}$$

E multiplicando ambos os lados por m_1m_2/m, somos conduzidos a

$$\begin{aligned}
\ddot{\vec{r}}\left(\frac{m_1m_2}{m}\right) &= m_1\ddot{\vec{r}}_1 \\
\mu\ddot{\vec{r}} &= m_1\ddot{\vec{r}}_1 \\
\mu\ddot{\vec{r}} &= -\frac{Gm_1m_2}{r^2}\hat{r},
\end{aligned} \tag{52}$$

onde

$$\mu \equiv \frac{m_1m_2}{m} \tag{53}$$

é a massa reduzida do sistema.

$$\therefore \quad \mu\ddot{\vec{r}} = -\frac{Gm\mu}{r^2}\hat{r}. \tag{54}$$

No lado esquerdo da equação, o termo $\mu\ddot{\vec{r}}$ corresponde à força que uma partícula de massa reduzida μ sente a uma distância $\vec{r}$ da origem. Já o lado direito nos diz que a força, de

natureza gravitacional, é gerada por m. Isso revela que há uma equivalência entre um sistema de um corpo influenciando gravitacionalmente o movimento de uma partícula teste, e o problema de dois corpos interagindo mutuamente. Este último é matematicamente equivalente a uma partícula de massa μ se movendo no campo gravitacional gerado por um corpo de massa m. Dessa forma, as equações deduzidas anteriormente se mantêm válidas para o sistema binário, bastando substituir a massa M por $m = m_1 + m_2$.

2.3 Método das órbitas osculantes

2.3.1 Órbitas keplerianas no espaço

A descrição orbital no problema de Kepler é feita com base na própria órbita do corpo, pois ela permanece fixa no tempo devido à conservação do momento angular. No entanto, essa abordagem se torna menos apropriada quando se considera um sistema de dois corpos perturbado por um terceiro. Nessa situação, a órbita não permanece constante. Ela se modifica com o tempo devido à perturbação gravitacional gerada pelo terceiro corpo. Para tal aplicação, é necessária uma descrição mais completa em relação a um plano orbital referencial fixo [1].

A figura 6 apresenta o plano orbital cruzando o plano fundamental em um ângulo i. A linha de intersecção entre os dois planos é conhecida como linha de nós. Ω é o ângulo formado entre o eixo X e a linha de nós, ω é o ângulo entre a linha de nós e a distância do periélio e f é o ângulo entre a distância do periélio e o vetor posição do corpo m_1.

De acordo com o novo sistema de referência, as componentes do vetor posição $\vec{r}$ passam a ser [1]

$$r^X = r[\cos\Omega\cos(\omega + f) - \cos i \sin\Omega \sin(\omega + f)], \tag{55}$$

$$r^Y = r[\sin\Omega\cos(\omega + f) + \cos i \cos\Omega \sin(\omega + f)], \tag{56}$$

$$r^Z = r \sin i \sin(\omega + f), \tag{57}$$

onde $r = p/(1 + e\cos f)$.

Derivando as equações acima no tempo, obtêm-se as componentes da velocidade. Essas equações e uma descrição mais detalhada da mudança de referencial podem ser encontradas na referência [1].

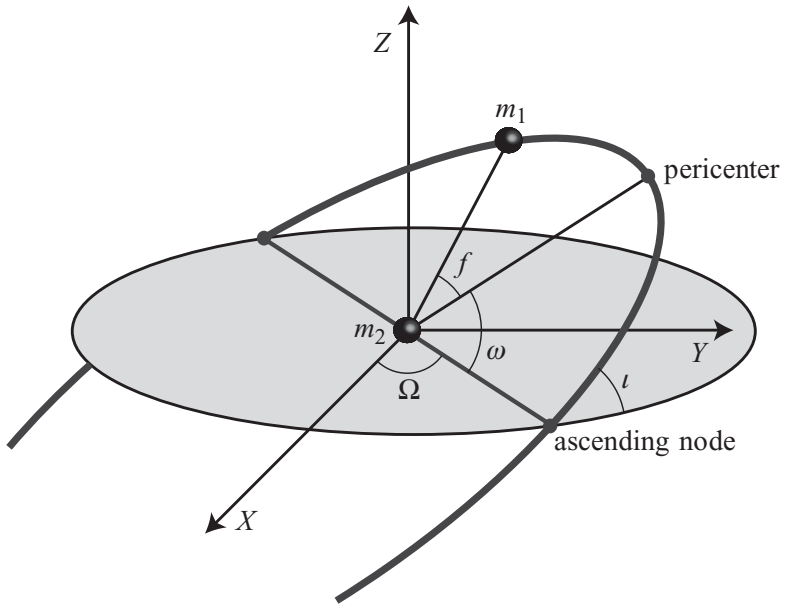


Figura 6: Novo referencial fixo.
Fonte: [1, p. 151].

2.3.2 Aceleração perturbativa

Vamos supor que a aceleração relativa de um sistema de dois corpos seja dada por:

$$\vec{a} = -\frac{Gm}{r^2}\hat{r} + \vec{a}_p, \tag{58}$$

onde

$$\vec{a}_p = \mathcal{R}\hat{r} + \mathcal{S}\hat{\theta} + \mathcal{W}\hat{k} \tag{59}$$

é a aceleração perturbativa do sistema e $m = m_1 + m_2$.

2.3.3 O método

É sempre possível resolver a equação (58) encontrando a solução da equação diferencial seja por métodos analíticos, quando o problema é simples, ou por métodos numéricos. No entanto, será usada a abordagem que foi inicialmente concebida por Euler e Lagrange, chamada de *método da osculação de elementos orbitais* [1].

O método consiste em adotar a solução do problema de Kepler como solução para o problema perturbado, fazendo com que os elementos orbitais $\mu^\alpha = (p, \omega, e)$ variem no tempo $\mu^\alpha(t)$. O significado do método é que a órbita não é mais uma elipse estática como no problema de Kepler, mas uma elipse cuja forma evolui no tempo e rotaciona no espaço. [1].

De forma geral, as equações de movimento podem ser expressadas como:

$$\vec{r}(t) = \vec{r}_{Kepler}(t, \mu^\alpha(t)) \tag{60}$$

$$\begin{aligned}\vec{v}(t) &= \frac{d}{dt}\vec{r}_{Kepler}(t, \mu^\alpha(t)) \\ &= \frac{\partial \vec{r}_{Kepler}}{\partial t} + \sum_\alpha \frac{\partial \vec{r}_{Kepler}}{\partial \mu^\alpha}\frac{d\mu^\alpha}{dt}\end{aligned} \tag{61}$$

$$\begin{aligned}\vec{a}(t) &= \frac{d}{dt}\vec{v}_{Kepler}(t, \mu^\alpha(t)) \\ &= \frac{\partial \vec{v}_{Kepler}}{\partial t} + \sum_\alpha \frac{\partial \vec{v}_{Kepler}}{\partial \mu^\alpha}\frac{d\mu^\alpha}{dt}.\end{aligned} \tag{62}$$

Se

$$\vec{a} = \vec{a}_{Kepler} + \vec{a}_p, \tag{63}$$

então podemos extrair que

$$\vec{a}_p = \sum_a \frac{\partial \vec{v}_{Kepler}}{\partial \mu^\alpha}\frac{d\mu^\alpha}{dt}. \tag{64}$$

2.3.4 Equações osculantes

A referência [1, p. 160] discute como calcular a variação dos elementos orbitais em relação a f. A seguir, são apresentadas respectivamente a variação da excentricidade e do periélio quando as perturbações são pequenas:

$$\frac{de}{df} \approx \frac{p^2}{Gm}\left[\frac{\sin f}{(1+e\cos f)^2}\mathcal{R} + \frac{2\cos f + e(1+\cos^2 f)}{(1+e\cos f)^3}\mathcal{S}\right], \tag{65}$$

e

$$\frac{d\omega}{df} \approx \frac{1}{e}\frac{p^2}{Gm}\left[-\frac{\cos f}{(1+e\cos f)^2}\mathcal{R} + \frac{2+e\cos f}{(1+e\cos f)^3}\sin f\mathcal{S} - e\cot l\frac{\sin(\omega+f)}{(1+e\cos f)^3}\mathcal{W}\right]. \tag{66}$$

O interesse está a cerca de conhecer qual o acúmulo dessas variações ao longo de uma órbita, portanto:

$$\Delta\mu^\alpha = \int_0^{2\pi} \frac{d\mu^\alpha}{df}df. \tag{67}$$

Dividindo o resultado acima pelo período kepleriano de órbita P, temos uma medida de quanto o parâmetro varia por tempo de órbita:

$$\left(\frac{d\mu^\alpha}{dt}\right)_{sec} = \frac{\Delta\mu^\alpha}{P}. \tag{68}$$

O termo *sec*, que aparece na expressão acima, direciona a pensar em termos de séculos, já que as variações serão realmente significativas em grandes escalas temporais.

2.4 Perturbação por um terceiro corpo

Um caso interessante para se estudar é o sistema Sol-Mercúrio, perturbado por um terceiro corpo remoto, como Júpiter, a segunda maior massa do sistema solar. Esse é um problema de três corpos, considerando que o terceiro corpo está longe o suficiente para que sua influência gravitacional seja fraca [1].

A aceleração $\vec{a}_M$ que Mercúrio irá sentir é dada por:

$$\vec{a}_M = -\frac{Gm_S}{r^2}\hat{r} - \frac{Gm_J(\vec{r}-\vec{R})}{|\vec{r}-\vec{R}|^3}, \tag{69}$$

onde m_S é a massa do Sol, m_J a massa de Júpiter, $\vec{r}$ é o vetor posição que liga Sol-Mercúrio e $\vec{r}-\vec{R}$ é o vetor que liga Júpiter-Mercúrio (veja Figura 7).

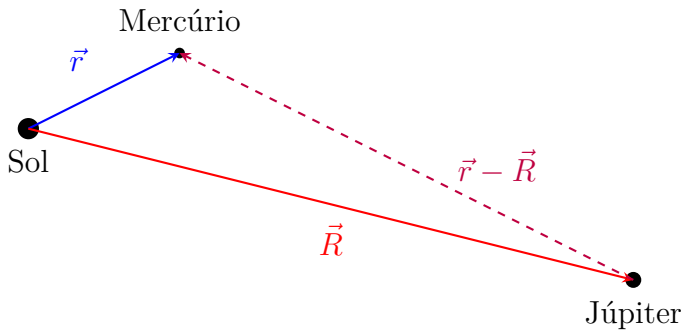


Figura 7: Diagrama do problema Kepleriano perturbado por um terceiro corpo.

A aceleração $\vec{a}_S$ que o Sol irá sentir é dada por:

$$\vec{a}_S = \frac{Gm_M}{r^2}\hat{r} + \frac{Gm_J}{R^2}\hat{R}, \tag{70}$$

tal que $\vec{R}$ é o vetor que liga Sol-Júpiter.

A aceleração relativa $\vec{a}$ do sistema é dada por:

$$\begin{aligned}\vec{a} &= \vec{a}_M - \vec{a}_S \\ &= -\frac{Gm_S}{r^2}\hat{r} - \frac{Gm_J(\vec{r}-\vec{R})}{|\vec{r}-\vec{R}|^3} - \left(\frac{Gm_M}{r^2}\hat{r} + \frac{Gm_J}{R^2}\hat{R}\right).\end{aligned} \tag{71}$$

Removendo os termos keplerianos, resta a aceleração perturbativa:

$$\vec{a}_p = -Gm_J\left(\frac{\vec{r}-\vec{R}}{|\vec{r}-\vec{R}|^3} + \frac{\hat{R}}{R^2}\right). \tag{72}$$

Através de um processo de aproximação por série de Taylor, assumindo que $R \gg r$ (veja Apêndice B para maiores detalhes), a aceleração perturbativa pode ser escrita como:

$$a_p = -\frac{Gm_J r}{R^3}\left[\hat{r} - 3(\hat{r}\cdot\hat{R})\hat{R}\right]. \tag{73}$$

As componentes da aceleração na base kepleriana $(\hat{r}, \hat{\theta}, \hat{k})$ são:

$$\mathcal{R} \equiv \vec{a}_p \cdot \hat{r} = -\frac{Gm_J r}{R^3}\left[1 - 3(\hat{r}\cdot\hat{R})^2\right], \tag{74}$$

$$\mathcal{S} \equiv \vec{a}_p \cdot \hat{\theta} = 3\frac{Gm_J r}{R^3}(\hat{r}\cdot\hat{R})(\hat{\theta}\cdot\hat{R}), \tag{75}$$

$$\mathcal{W} \equiv \vec{a}_p \cdot \hat{k} = 3\frac{Gm_J r}{R^3}(\hat{r}\cdot\hat{R})(\hat{k}\cdot\hat{R}). \tag{76}$$

Apesar das equações $\mathcal{R}$, $\mathcal{S}$ e $\mathcal{W}$ terem sido obtidas no contexto do sistema Sol-Mercúrio perturbado por Júpiter, são aplicáveis a qualquer sistema com perturbação gravitacional análoga [1].

Ainda que Mercúrio e Júpiter não se movam no mesmo plano orbital (há uma inclinação relativa de 6 graus), por razões de simplicidade, será assumido que ambos se movem em um plano orbital comum. Além disso, será adotado que Júpiter se move em uma órbita circular de raio R, bem como que a massa do Sol é predominante em comparação com a massa de Mercúrio [1].

Com isso, a frequência angular Ω_J com que Júpiter revoluciona é expressa por:

$$F_g = F_c$$

$$\frac{Gm_S m_J}{R^2} = \frac{m_J v^2}{R}$$

$$\frac{Gm_S}{R} = R^2\Omega_J^2$$
$$\therefore\ \Omega_J = \sqrt{\frac{Gm_S}{R^3}}, \tag{77}$$

onde F_g representa a força gravitacional e F_c a força centrípeta. É válido considerar R como a distância de Júpiter ao centro de massa, uma vez que 99% da massa do sistema solar está concentrada no Sol [3].

O ângulo descrito por Júpiter enquanto Mercúrio completa uma órbita é chamado de anomalia verdadeira F e é obtido fazendo:

$$\begin{aligned} F &= \Omega_J t \\ &= \Omega_J P \\ &= \sqrt{\frac{Gm_S}{R^3}} 2\pi \sqrt{\frac{a^3}{Gm_S}} \\ &= 2\pi\sqrt{\frac{a^3}{R^3}} \ll 1. \end{aligned} \tag{78}$$

De forma que a direção $\hat{R}$ pode ser escrita como:

$$\hat{R} = \cos F\hat{i} + \sin F\hat{j}. \tag{79}$$

Além de que já conhecemos:

$$\begin{aligned} \hat{r} &= \cos\theta\hat{i} + \sin\theta\hat{j} \\ &= \cos(f+\omega)\hat{i} + \sin(f+\omega)\hat{j}, \end{aligned} \tag{80}$$

$$\begin{aligned} \hat{\theta} &= -\sin\theta\hat{i} + \cos\theta\hat{j} \\ &= -\sin(f+\omega)\hat{i} + \cos(f+\omega)\hat{j}. \end{aligned} \tag{81}$$

Agora temos condições de calcular os produtos escalares com o objetivo de determinar as componentes $\mathcal{R}$, $\mathcal{S}$, $\mathcal{W}$ encontradas anteriormente. Portanto,

$$\begin{aligned} \hat{r}\cdot\hat{R} &= \cos(f+\omega)\cos F + \sin(f+\omega)\sin F \\ &= \cos(f+\omega-F), \end{aligned} \tag{82}$$

$$\begin{aligned}\hat{\theta}\cdot\hat{R} &= -\sin(f+\omega)\cos F + \cos(f+\omega)\sin F \\ &= -\sin(f+\omega-F),\end{aligned} \tag{83}$$

$$\hat{k}\cdot\hat{R} = 0, \tag{84}$$

uma vez que $\hat{R}$ está no plano xy. Obtém-se, portanto,

$$\mathcal{R} = -\frac{Gm_J r}{R^3}[1-3\cos^2(f+\omega-F)], \tag{85}$$

$$\mathcal{S} = -3\frac{Gm_J r}{R^3}\sin(f+\omega-F)\cos(f+\omega-F), \tag{86}$$

$$\mathcal{W} = 0. \tag{87}$$

Usando que $r = p/(1+e\cos f)$,

$$\mathcal{R} = -\frac{Gm_J p}{R^3}\frac{[1-3\cos^2(f+\omega-F)]}{(1+e\cos f)}, \tag{88}$$

$$\mathcal{S} = -3\frac{Gm_J p}{R^3}\frac{\sin(f+\omega-F)\cos(f+\omega-F)}{(1+e\cos f)}. \tag{89}$$

Agora torna-se possível calcular a variação de ω no tempo, através da equação osculante (66).

$$\begin{aligned}\frac{d\omega}{df} \approx & \frac{1}{e}\frac{p^2}{Gm}\left\{-\frac{\cos f}{(1+e\cos f)^2}\left[-\frac{Gm_J}{R^3}\frac{p}{(1+e\cos f)}(1-3\cos^2(f+\omega-F))\right]\right. \\ & \left. +\frac{2+e\cos f}{(1+e\cos f)^3}\sin f\left[-3\frac{Gm_J}{R^3}\frac{p}{(1+e\cos f)}\sin(f+\omega-F)\cos(f+\omega-F)\right]\right\}\end{aligned} \tag{90}$$

A integração desse termo para se obter a variação de ω por órbita é bem complicada e, portanto, se recorreu ao *software* Wolfram Mathematica[3] para tal procedimento, cujo código está disponibilizado no Apêndice C e sua solução é:

$$\begin{aligned}\Delta\omega &= \int_0^{2\pi}\frac{d\omega}{df}df \\ &= \frac{3\pi}{2}\frac{m_J p^3}{mR^3}(1-e^2)^{-5/2}[1+5\cos 2(\omega-F)].\end{aligned} \tag{91}$$

[3]Link: https://www.wolfram.com/mathematica/

O valor médio de $\Delta\omega$ é calculado integrando ω de 0 a 2π e dividindo o resultado por 2π:

$$\langle\Delta\omega\rangle = \frac{3\pi}{2}\frac{m_J p^3}{mR^3}(1-e^2)^{-5/2}\left\{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}[1+5\cos 2(\omega-F)]d\omega\right\}, \tag{92}$$

como o cosseno tem média nula,

$$\begin{aligned}\langle\Delta\omega\rangle &= \frac{3\pi}{2}\frac{m_J p^3}{mR^3}(1-e^2)^{-5/2} \\ &= \frac{3\pi}{2}\frac{m_J}{m}\left(\frac{a}{R}\right)^3(1-e^2)^{1/2}.\end{aligned} \tag{93}$$

Consultando o *site* da NASA,[4] conseguimos obter os valores dos parâmetros orbitais acima para cada planeta do sistema solar. Embora os cálculos tenham sido feitos considerando Júpiter, o resultado acima pode ser aplicado aos demais planetas. Aplicando para Júpiter:

$$\begin{aligned}\langle\Delta\omega\rangle &\approx 1,89\times 10^{-6}\text{ radianos/órbita} \\ &= 0,38984\text{ segundos de arco/órbita.}\end{aligned} \tag{94}$$

O período orbital P de Mercúrio é igual a 87,969 dias, equivalente a 0,2408 anos ou 0,002408 séculos. Recorrendo a equação (68), temos:

$$\left(\frac{d\omega}{dt}\right)_{sec} = 161,89\text{ segundos de arco/século.} \tag{95}$$

A Tabela 1 apresenta dados disponíveis na literatura, os quais demonstram boa concordância com o resultado numérico obtido a partir dos dados fornecidos pela NASA. Vênus tem a maior contribuição para o avanço do periélio de Mercúrio devido à sua proximidade, seguido por Júpiter devido à sua massa. A soma de todas as contribuições planetárias resulta em 531,2 ″/século, com uma discrepância de 42,9 ″/século que não é explicada pela teoria gravitacional newtoniana, mas que é precisamente explicada com a teoria da relatividade geral de Einstein [1].

Revisamos neste capítulo aspectos básicos da gravitação newtoniana e o problema de Kepler. Vimos como um sistema binário tem como solução uma órbita elíptica estática, com parâmetros orbitais constantes. Com isso, o fenômeno do avanço do periélio, mais fortemente observável na órbita de Mercúrio, só é produzido devido à perturbação dos demais planetas do sistema solar e, ainda assim, não o faz de maneira suficiente para explicar os dados observacionais.

[4]Link: https://nssdc.gsfc.nasa.gov/planetary/factsheet/

Tabela 1: Contribuição planetária para o avanço do periélio do Mercúrio. Fonte: Ref. [1], adaptada pelo autor.

Planeta	**Avanço [″/século]**
Vênus	277,8
Terra	90,0
Marte	2,5
Júpiter	153,6
Saturno	7,3
Total	531,2
Valor observado	574,1
Discrepância	42,9
Discrepância atual	42,98 ± 0,04
Predição da relatividade geral	42,98

No próximo capítulo, iremos explorar uma proposta de modificação da gravitação newtoniana e examiná-la sob a luz da variação do periélio orbital. Buscaremos entender como a teoria modificada pode introduzir a variação dos elementos orbitais já em um sistema binário e analisar a condição necessária para que se tenha concordância com os dados observacionais para Mercúrio.

3 Teoria newtoniana com G variável

Inicialmente, notemos que a equação de Poisson da gravitação newtoniana (15), pode ser obtida a partir da lagrangiana [7]:

$$\mathcal{L} = \frac{\vec{\nabla}U \cdot \vec{\nabla}U}{8\pi G} - \rho U, \tag{96}$$

onde ρ é a densidade de matéria, U é o potencial gravitacional newtoniano e G é a constante gravitacional. Aplicando a lagrangiana $\mathcal{L}$ na equação de Euler-Lagrange:

$$\vec{\nabla} \cdot \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \vec{\nabla}U} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial U} = 0, \tag{97}$$

temos

$$\vec{\nabla} \cdot \left(\frac{2\vec{\nabla}U}{8\pi G} \right) + \rho = 0$$

$$\nabla^2 U = -4\pi G\rho, \tag{98}$$

cuja solução é encontrada pelo *método das funções de Green* [4]:

$$U = G \int_V \frac{\rho(\vec{r}\,')}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|} d^3r', \tag{99}$$

onde d^3r' é o elemento infinitesimal de volume.

3.1 Lagrangiana newtoniana modificada

Inspirado pelo trabalho desenvolvido nas referências [4] e [10], busca-se modificar de forma genérica a lagrangiana (96), com o objetivo de determinar os parâmetros necessários para que a teoria se mostre consistente com os dados observacionais do avanço do periélio de Mercúrio.

A lagrangiana proposta abaixo incorpora um novo campo escalar σ cujo o objetivo é dar mais amplitude à teoria, resultando em uma modificação na constante gravitacional newtoniana G.

$$\mathcal{L} = \frac{k(\sigma)\vec{\nabla}\psi \cdot \vec{\nabla}\psi}{8\pi G_0} - \frac{\omega}{8\pi G_0} \left(f(\psi,\sigma)\dot{\sigma}^2 - g(\psi,\sigma)\vec{\nabla}\sigma \cdot \vec{\nabla}\sigma \right) + \psi h(\sigma)\rho, \tag{100}$$

onde $k(\sigma)$, $h(\sigma)$, $f(\psi,\sigma)$ e $g(\psi,\sigma)$ são funções genéricas, ω e G_0 são constantes arbitrá-

rias. A lagrangiana $\mathcal{L}$ representa densidade de energia. Em termos de unidades temos: $[\psi] = m^2/s^2$, $[G_0] = m^3/(kg \cdot s^2)$, $[k(\sigma)] = 1$ (adimensional), $[\omega] = 1$, $f(\psi, \sigma) = m^2/s^2$, $[g(\psi, \sigma)] = m^4/s^4$ e $[h(\sigma)] = 1$.

3.2 Equações de campo

Aplicando a lagrangiana $\mathcal{L}$ nas equações de Euler-Lagrange, [7]:

$$\vec{\nabla} \cdot \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \vec{\nabla}\psi} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi} = 0 \qquad \text{e} \qquad \vec{\nabla} \cdot \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \vec{\nabla}\sigma} + \frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\sigma}} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \sigma} = 0, \tag{101}$$

obtemos as equações de campo para ψ (veja o Apêndice D para maiores detalhes)

$$k(\sigma)\nabla^2\psi + \frac{\omega}{2}\left(f_\psi \dot{\sigma}^2 - g_\psi \vec{\nabla}\sigma \cdot \vec{\nabla}\sigma\right) = 4\pi G_0 h(\sigma)\rho \tag{102}$$

e para σ

$$\begin{aligned} g(\psi,\sigma)\nabla^2\sigma - f(\psi,\sigma)\ddot{\sigma} - k_\sigma \frac{(\vec{\nabla}\psi \cdot \vec{\nabla}\psi)}{2\omega} + \frac{g_\sigma(\vec{\nabla}\sigma \cdot \vec{\nabla}\sigma)}{2} \\ + g_\psi(\vec{\nabla}\psi \cdot \vec{\nabla}\sigma) - \frac{f_\sigma \dot{\sigma}^2}{2} = \frac{4\pi G_0}{\omega}\rho\psi h_\sigma, \end{aligned} \tag{103}$$

tal que k_σ, g_σ, g_ψ, f_σ e h_σ indicam derivadas parciais das funções em relação ao campo que consta no subíndice calculadas nas soluções de fundo ψ_0 e σ_0.

Observe que se $\omega \to \infty$ e σ for uma constante, recuperamos a equação de Poisson para o campo gravitacional newtoniano na equação (102), com ψ fazendo o papel do potencial newtoniano U, e a equação (103) passa a ser zero.

3.3 Correções para o potencial newtoniano

O método utilizado para determinar as correções do potencial newtoniano é chamado de *método perturbativo* e consiste em expandir os campos em série até a segunda ordem [4]:

$$\psi = \psi_0 + \psi_1 + \psi_2 \qquad\qquad \sigma = \sigma_0 + \sigma_1 + \sigma_2, \tag{104}$$

de forma que $\psi_2 \ll \psi_1 \ll \psi_0$ e $\sigma_2 \ll \sigma_1 \ll \sigma_0$. O método perturbativo é útil pois permite obter equações diferenciais lineares para os campos, ordem a ordem, facilitando o processo de resolução dessas equações. Será assumido que cada derivada temporal aumenta em um a ordem perturbativa, ou seja: $\psi_1 \sim \mathcal{O}(1)$, mas $\dot{\psi}_1 \sim \mathcal{O}(2)$. Isso é equivalente a

dizer que os campos gravitacionais variam lentamente com o tempo. Assume-se também que $\rho \sim \mathcal{O}(1)$. Os valores σ_0 e ψ_0 representam um cenário global de fundo no qual o sistema solar está imerso – refletindo, por exemplo, a influência gravitacional do buraco negro central da galáxia. Como essas quantidades variam de forma significativa em um intervalo de tempo muito grande, podemos assumi-las como constantes. [4].

3.3.1 Perturbação de primeira ordem

Considerando apenas termos de primeira ordem, obtemos para ψ:

$$\nabla^2 \psi_1 = \frac{4\pi G_0 \rho h_0}{k_0}, \tag{105}$$

desconsiderando $\frac{\omega}{2}\left(f_\psi \dot{\sigma}^2 - g_\psi \vec{\nabla}\sigma \cdot \vec{\nabla}\sigma\right)$ pois $\vec{\nabla}\sigma_1 \cdot \vec{\nabla}\sigma_1 \sim \mathcal{O}(2)$ e $\dot{\sigma}_1^2 \sim \mathcal{O}(4)$. As funções $h(\sigma)$ e $k(\sigma)$ devem ser expandidas juntamente com os campos, portanto escritas como séries de Taylor em torno de σ_0 (solução de fundo) até a primeira ordem, de forma que a notação utilizada, h_0 e k_0, represente respectivamente $h(\sigma_0)$ e $k(\sigma_0)$. Comparando a equação (105) com a equação (99), conseguimos escrever uma solução para ψ_1:

$$\psi_1 = -\frac{G_0 h_0}{k_0} \int_V \frac{\rho(\vec{r}\,')}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|} d^3 r' \tag{106}$$

Temos condições de escrever essa solução em termos do próprio campo gravitacional newtoniano U, o que já era esperado visto que desejamos obter o potencial newtoniano na primeira ordem, de forma que as modificações da teoria apareçam apenas na segunda ordem. Portanto,

$$\psi_1 = -\frac{G_0 h_0}{k_0} \frac{U}{G}. \tag{107}$$

Para o campo σ, após aproximação em primeira ordem, obtemos

$$\nabla^2 \sigma_1 = \frac{4\pi G_0 \rho \psi_0 h_\sigma}{\omega g_0}. \tag{108}$$

Escrevendo a solução em função de U,

$$\begin{aligned} \sigma_1 &= -\frac{G_0 \psi_0 h_\sigma}{\omega g_0} \int_V \frac{\rho(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} d^3 r' \\ &= -\frac{G_0 \psi_0 h_\sigma}{\omega g_0} \frac{U}{G}. \end{aligned} \tag{109}$$

3.3.2 Perturbação de segunda ordem

Passando para a segunda ordem, obtemos para ψ:

$$\nabla^2\psi_2 = \frac{\omega}{2k_0}g_\psi(\vec{\nabla}\sigma_1)^2 + \frac{4\pi G_0\rho\sigma_1}{k_0}\left(h_\sigma - \frac{h_0k_\sigma}{k_0}\right). \tag{110}$$

Os cálculos para segunda ordem estão detalhados no Apêndice E.

Conhecendo o resultado de σ_1 e usando que $(\vec{\nabla}U)^2 = \nabla^2\left(\frac{U^2}{2} - \Phi_2\right)$, onde (veja apêndice F para mais detalhes)

$$\nabla^2\Phi_2 = -4\pi G\rho U \qquad \Rightarrow \qquad \Phi_2 = G\int\frac{\rho(\vec{r}')U(\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|}d^3r' \tag{111}$$

é um termo muito comum em teorias relativísticas, por isso usaremos essa mesma notação (Φ_2) para representá-lo [4]. Em decorrência disso, a solução de ψ_2 é dada como

$$\psi_2 = \frac{\psi_0h_\sigma}{\omega k_0g_0}\left(\frac{G_0}{G}\right)^2\left[\frac{\psi_0h_\sigma}{2g_0}g_\psi\left(\frac{U^2}{2} - \Phi_2\right) + \left(h_\sigma - \frac{h_0k_\sigma}{k_0}\right)\Phi_2\right]. \tag{112}$$

Para o campo σ, temos

$$\begin{aligned} g_0\nabla^2\sigma_2 = k_\sigma\frac{(\vec{\nabla}\psi_1)^2}{2\omega} - g_\sigma\frac{(\vec{\nabla}\sigma_1)^2 + 2\sigma_1\nabla^2\sigma_1}{2} - g_\psi[(\vec{\nabla}\psi_1\cdot\vec{\nabla}\sigma_1) + \psi_1\nabla^2\sigma_1] \\ + \frac{4\pi G_0\rho\psi_0h_{\sigma\sigma}\sigma_1}{\omega} + \frac{4\pi G_0\rho\psi_1h_\sigma}{\omega}, \end{aligned} \tag{113}$$

como conhecemos as soluções de ψ_1 e σ_1, a expressão acima se torna:

$$\begin{aligned} \sigma_2 = \frac{1}{\omega g_0}\left(\frac{G_0}{G}\right)^2\left\{\frac{h_0^2k_\sigma}{2k_0^2}\left(\frac{U^2}{2} - \Phi_2\right) - \frac{g_\sigma}{2}\left[\frac{\psi_0^2h_\sigma^2}{\omega g_0^2}\left(\frac{U^2}{2} + \Phi_2\right)\right]\right. \\ \left. -g_\psi\left(\frac{\psi_0h_0h_\sigma}{k_0g_0}\frac{U^2}{2}\right) + \left(\frac{\psi_0^2h_\sigma h_{\sigma\sigma}}{\omega g_0} + \frac{h_0h_\sigma}{k_0}\right)\Phi_2\right\}. \end{aligned} \tag{114}$$

3.3.3 Potencial gravitacional efetivo

Após determinar os campos até a segunda ordem, conseguimos determinar o potencial efetivo U_{ef} da teoria, cuja expressão é dada pelo termo que acompanha a densidade de

matéria ρ, na lagrangiana (100):

$$\begin{aligned} U_{ef} &= -\psi h(\sigma) \\ &= -(\psi_0+\psi_1+\psi_2)\left[h_0 + h_\sigma(\sigma_1+\sigma_2) + \frac{h_{\sigma\sigma}\sigma_1^2}{2}\right]. \end{aligned} \tag{115}$$

Repare que a expressão mais completa seria com o último termo sendo $\frac{h_{\sigma\sigma}(\sigma_1+\sigma_2)^2}{2}$, porém isso resultaria em $2\sigma_1\sigma_2 \sim \mathcal{O}(3)$ e $\sigma_2^2 \sim \mathcal{O}(4)$ que são desprezíveis. Portanto,

$$U_{ef} = -\left(\psi_0 h_0 + \psi_0 h_\sigma \sigma_1 + \psi_0 h_\sigma \sigma_2 + \frac{\psi_0 h_{\sigma\sigma}\sigma_1^2}{2} + \psi_1 h_0 + \psi_1 h_\sigma \sigma_1 + \psi_2 h_0\right). \tag{116}$$

Substituindo as soluções de σ_1, ψ_1, σ_2 e ψ_2, temos:

$$\begin{aligned} U_{ef} = -\Bigg\{&\psi_0 h_0 + \psi_0 h_\sigma \left(-\frac{G_0\psi_0 h_\sigma}{\omega g_0}\frac{U}{G}\right) \\ &+\psi_0 h_\sigma \left[\frac{1}{\omega g_0}\left(\frac{G_0}{G}\right)^2 \left\{\frac{h_0^2 k_\sigma}{2k_0^2}\left(\frac{U^2}{2}-\Phi_2\right) - \frac{g_\sigma}{2}\left[\frac{\psi_0^2 h_\sigma^2}{\omega g_0^2}\left(\frac{U^2}{2}+\Phi_2\right)\right]\right.\right. \\ &\left.\left.-g_\psi\left(\frac{\psi_0 h_0 h_\sigma}{k_0 g_0}\frac{U^2}{2}\right) + \left(\frac{\psi_0^2 h_\sigma h_{\sigma\sigma}}{\omega g_0} + \frac{h_0 h_\sigma}{k_0}\right)\Phi_2\right\}\right] + \frac{\psi_0 h_{\sigma\sigma}}{2}\left(-\frac{G_0\psi_0 h_\sigma}{\omega g_0}\frac{U}{G}\right)^2 \\ &+\left(-\frac{G_0 h_0}{k_0}\frac{U}{G}\right)h_0 + \left(-\frac{G_0 h_0}{k_0}\frac{U}{G}\right)h_\sigma\left(-\frac{G_0\psi_0 h_\sigma}{\omega g_0}\frac{U}{G}\right) \\ &+h_0\left[\frac{\psi_0 h_\sigma}{\omega k_0 g_0}\left(\frac{G_0}{G}\right)^2\left[\frac{\psi_0 h_\sigma}{2g_0}g_\psi\left(\frac{U^2}{2}-\Phi_2\right) + \left(h_\sigma - \frac{h_0 k_\sigma}{k_0}\right)\Phi_2\right]\right]\Bigg\}, \end{aligned} \tag{117}$$

e, simplificando,

$$\begin{aligned} U_{ef} = -\Bigg[&\psi_0 h_0 - \left(\frac{G_0}{G}\right)\left(\frac{\psi_0^2 h_\sigma^2}{\omega g_0} + \frac{h_0^2}{k_0}\right)U \\ &+\frac{\psi_0 h_\sigma}{\omega g_0}\left(\frac{G_0}{G}\right)^2\left(\frac{h_0^2 k_\sigma}{4k_0^2} - \frac{g_\sigma}{4}\frac{\psi_0^2 h_\sigma^2}{\omega g_0^2} - \frac{g_\psi}{4}\frac{\psi_0 h_0 h_\sigma}{k_0 g_0} + \frac{\psi_0^2 h_\sigma h_{\sigma\sigma}}{2\omega g_0} + \frac{h_0 h_\sigma}{k_0}\right)U^2 \\ &+\frac{\psi_0 h_\sigma}{\omega g_0}\left(\frac{G_0}{G}\right)^2\left(-\frac{3}{2}\frac{h_0^2 k_\sigma}{k_0^2} - \frac{g_\sigma}{2}\frac{\psi_0^2 h_\sigma^2}{\omega g_0^2} + \frac{\psi_0^2 h_\sigma h_{\sigma\sigma}}{\omega g_0} + 2\frac{h_0 h_\sigma}{k_0} - \frac{g_\psi}{2}\frac{\psi_0 h_0 h_\sigma}{g_0 k_0}\right)\Phi_2\Bigg]. \end{aligned} \tag{118}$$

Para que o potencial efetivo acima reproduza os resultados da gravidade newtoniana em primeira ordem, devemos impor que:

$$\frac{G_0}{G}\left(\frac{\psi_0^2 h_\sigma^2}{\omega g_0} + \frac{h_0^2}{k_0}\right) = 1. \tag{119}$$

Uma vez que o limite newtoniano da teoria ocorre quando $\omega \to \infty$, é natural trabalhar com uma nova aproximação onde $\omega g_0 \gg 1$, implicando que

$$\frac{G_0}{G} \approx \frac{k_0}{h_0^2}. \tag{120}$$

Assim, o potencial efetivo pode ser simplificado ainda mais para

$$\begin{aligned} U_{ef} = -\Bigg[& \psi_0 h_0 - U + \frac{\psi_0 k_0 h_\sigma}{\omega g_0 h_0^3}\left(\frac{h_0 k_\sigma}{4k_0} - \frac{g_\psi \psi_0 h_\sigma}{4g_0} + h_\sigma\right) U^2 \\ & + \frac{\psi_0 k_0 h_\sigma}{\omega g_0 h_0^3 k_0}\left(-\frac{3h_0 k_\sigma}{2k_0} + 2h_\sigma - \frac{g_\psi \psi_0 h_\sigma}{2g_0}\right)\Phi_2 \Bigg]. \end{aligned} \tag{121}$$

Definindo

$$\kappa_1 \equiv \frac{\psi_0 k_0 h_\sigma}{\omega g_0 h_0^3}\left(\frac{h_0 k_\sigma}{4k_0} - \frac{g_\psi \psi_0 h_\sigma}{4g_0} + h_\sigma\right) \quad \kappa_2 \equiv \frac{\psi_0 k_0 h_\sigma}{\omega g_0 h_0^3 k_0}\left(-\frac{3h_0 k_\sigma}{2k_0} + 2h_\sigma - \frac{g_\psi \psi_0 h_\sigma}{2g_0}\right), \tag{122}$$

temos:

$$U_{ef} = -\psi_0 h_0 + U - \kappa_1 U^2 - \kappa_2 \Phi_2. \tag{123}$$

No entanto, para ampliarmos o espectro de nossa análise, um outro caso possível de se estudar é quando $\omega g_0 \ll 1$, implicando em:

$$\frac{G_0}{G} \approx \frac{\omega g_0}{\psi_0^2 h_\sigma^2}, \tag{124}$$

e nos conduzindo a

$$U_{ef} = -\psi_0 h_0 + U - \frac{\lambda}{2} U^2 - \lambda \Phi_2, \tag{125}$$

onde definimos

$$\lambda \equiv \frac{1}{\psi_0 h_\sigma}\left(-\frac{g_\sigma}{2g_0} + \frac{h_{\sigma\sigma}}{h_\sigma}\right). \tag{126}$$

3.4 A aceleração gravitacional modificada

Agora que já conhecemos, até a primeira ordem pós-newtoniana, o potencial gravitacional efetivo da teoria modificada, nos interessa obter a equação de movimento em um sistema de N corpos. Partindo da *segunda lei de Newton* para determinar a força que age em um

corpo A em um sistema de N corpos,

$$\begin{aligned}\vec{f}_A &= m_A \vec{a}_A \\ &= \int_{V_A} \rho \vec{\nabla} U_{ef}\, dV_A,\end{aligned} \tag{127}$$

onde ρ é a densidade de matéria do corpo A e V_A refere-se ao volume do corpo A[4].

Podemos separar os potenciais gravitacionais em uma parte que é produzida pelo próprio corpo A e outra parte produzida pelos demais corpos [4]:

$$U = U_A + U_{ext}\,, \qquad\qquad \Phi_2 = \Phi_{2_A} + \Phi_{2_{ext}}. \tag{128}$$

Dessa forma, somente os potenciais externos contribuirão para o movimento do corpo A, tal que

$$\begin{aligned}\vec{f}_A &= \int_{V_A} \rho \vec{\nabla} \left(-\psi_0 h_0 + U_{ext} - \kappa_1 U_{ext}^2 - \kappa_2 \Phi_{2_{ext}}\right) dV_A \\ &= \int_{V_A} \rho \vec{\nabla} U_{ext}\, dV_A - 2\kappa_1 \int_{V_A} \rho U_{ext} \vec{\nabla} U_{ext}\, dV_A - \kappa_2 \int_{V_A} \rho \vec{\nabla} \Phi_{2_{ext}}\, dV_A.\end{aligned} \tag{129}$$

Note que estamos utilizando a equação (123) para representar o potencial gravitacional efetivo, obtida sob a aproximação $\omega g_0 \gg 1$, uma vez que o caso onde $\omega g_0 \ll 1$ pode ser recuperado fazendo $\kappa_2 = 2\kappa_1 = \lambda$.

Adotando a notação de índices onde

$$\partial_j \equiv \frac{\partial}{\partial x^j}, \tag{130}$$

e escrevendo a integral da densidade como sendo a massa do corpo A,

$$m_A = \int_{V_A} \rho\, dV_A, \tag{131}$$

podemos escrever a força $\vec{f}_A$ como [1, p. 433]:

$$f_A^j = m_A \partial_j U_{ext} - \kappa_1 (2\Omega_A^{jk} \partial_k U_{ext} - 4\Omega_A \partial_j U_{ext} + 2 m_A U_{ext} \partial_j U_{ext}) - \kappa_2 m_A \partial_j \Phi_{2_{ext}}, \tag{132}$$

de forma que [1, p. 416]

$$\Omega_A^{jk} = -\frac{G}{2} \int_A \frac{\rho(\vec{r})\rho(\vec{r}\,')(\vec{r} - \vec{r}\,')^j (\vec{r} - \vec{r}\,')^k}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|^3} d^3r' d^3r \tag{133}$$

e $\Omega_A = \Omega_A^{jk} \delta_{jk}$ é a energia gravitacional do corpo A.

Assumindo que os corpos estão bem separados, os potenciais externos podem ser expandidos em séries de Taylor [1, p. 437]:

$$U_{ext} = \sum_{B\neq A} \frac{Gm_B}{r_{AB}}, \tag{134}$$

$$\partial_j U_{ext} = -\sum_{B\neq A} \frac{Gm_B}{r_{AB}^2}\hat{r}_{AB}^j, \tag{135}$$

$$\partial_j \Phi_{2_{ext}} = 2\sum_{B\neq A} \frac{G\Omega_B}{r_{AB}^2}\hat{r}_{AB}^j - \sum_{B\neq A} \frac{G^2 m_A m_B}{r_{AB}^3}\hat{r}_{AB}^j - \sum_{B\neq A}\sum_{C\neq A,B} \frac{G^2 m_B m_C}{r_{AB}^2 r_{BC}}\hat{r}_{AB}^j. \tag{136}$$

Substituindo os resultados acima na equação de força (132),

$$\begin{aligned} f_A^j = &-\sum_{B\neq A} \frac{Gm_A m_B}{r_{AB}^2}\hat{r}_{AB}^j + 2\kappa_1 \sum_{B\neq A} \frac{G\Omega_A^{jk} m_B}{r_{AB}^2}\hat{r}_{AB}^k - 4\kappa_1 \sum_{B\neq A} \frac{G\Omega_A m_B}{r_{AB}^2}\hat{r}_{AB}^j \\ &- 2\kappa_1 \sum_{B\neq A} \frac{Gm_A m_B}{r_{AB}} \cdot \left(-\sum_{B\neq A} \frac{Gm_B}{r_{AB}^2}\hat{r}_{AB}^j \right) - 2\kappa_2 \sum_{B\neq A} \frac{G\Omega_B m_A}{r_{AB}^2}\hat{r}_{AB}^j \\ &+ \kappa_2 \sum_{B\neq A} \frac{G^2 m_A^2 m_B}{r_{AB}^3}\hat{r}_{AB}^j + \kappa_2 \sum_{B\neq A}\sum_{C\neq A,B} \frac{G^2 m_A m_B m_C}{r_{AB}^2 r_{BC}}\hat{r}_{AB}^j. \end{aligned} \tag{137}$$

No primeiro termo da segunda linha da equação acima, podemos fazer uma troca de índices como segue:

$$\begin{aligned} \sum_{B\neq A} \frac{Gm_A m_B}{r_{AB}} &= \sum_{C\neq A} \frac{Gm_A m_C}{r_{AC}} \\ &= \sum_{C\neq A,B} \frac{Gm_A m_C}{r_{AC}} + \frac{Gm_A m_B}{r_{AB}}. \end{aligned} \tag{138}$$

Isso implica em

$$\begin{aligned} f_A^j = &-\sum_{B\neq A} \frac{Gm_A m_B}{r_{AB}^2}\hat{r}_{AB}^j + 2\kappa_1 \sum_{B\neq A} \frac{G\Omega_A^{jk} m_B}{r_{AB}^2}\hat{r}_{AB}^k - 4\kappa_1 \sum_{B\neq A} \frac{G\Omega_A m_B}{r_{AB}^2}\hat{r}_{AB}^j \\ &+ 2\kappa_1 \sum_{B\neq A}\sum_{C\neq A,B} \frac{G^2 m_A m_B m_C}{r_{AB}^2 r_{AC}}\hat{r}_{AB}^j + 2\kappa_1 \sum_{B\neq A} \frac{G^2 m_A m_B^2}{r_{AB}^3}\hat{r}_{AB}^j - 2\kappa_2 \sum_{B\neq A} \frac{G\Omega_B m_A}{r_{AB}^2}\hat{r}_{AB}^j \\ &+ \kappa_2 \sum_{B\neq A} \frac{G^2 m_A^2 m_B}{r_{AB}^3}\hat{r}_{AB}^j + \kappa_2 \sum_{B\neq A}\sum_{C\neq A,B} \frac{G^2 m_A m_B m_C}{r_{AB}^2 r_{BC}}\hat{r}_{AB}^j. \end{aligned} \tag{139}$$

Organizando os termos,

$$
\begin{aligned}
f_A^j = &\sum_{B\neq A} \frac{G}{r_{AB}^2}\left(-m_A m_B \delta^{jk} + 2\kappa_1 \Omega_A^{jk} m_B - 4\kappa_1 \Omega_A m_B \delta^{jk} - 2\kappa_2 \Omega_B m_A \delta^{jk}\right)\hat{r}_{AB}^k \\
&+ \sum_{B\neq A} \frac{G^2}{r_{AB}^3}\left(2\kappa_1 m_A m_B^2 + \kappa_2 m_A^2 m_B\right)\hat{r}_{AB}^j \\
&+ \sum_{B\neq A}\sum_{C\neq A,B} \frac{G^2 m_A m_B m_C}{r_{AB}^2}\left(\frac{2\kappa_1}{r_{AC}} + \frac{\kappa_2}{r_{BC}}\right)\hat{r}_{AB}^j,
\end{aligned} \tag{140}
$$

onde

$$
\delta^{jk} = \begin{cases} 1, & \text{se } j = k \\ 0, & \text{se } j \neq k \end{cases} \tag{141}
$$

é o delta de Kronecker. Por fim, considerando que os corpos são aproximadamente esfericamente simétricos temos que $\Omega^{jk} \approx \frac{\Omega}{3}\delta^{jk}$, que conduz a [1]:

$$
\begin{aligned}
f_A^j = &\sum_{B\neq A} \frac{G}{r_{AB}^2}\left(-m_A m_B + \frac{2\kappa_1}{3}\Omega_A m_B - 4\kappa_1 \Omega_A m_B - 2\kappa_2 \Omega_B m_A\right)\hat{r}_{AB}^j \\
&+ \sum_{B\neq A} \frac{G^2}{r_{AB}^3}\left(2\kappa_1 m_A m_B^2 + \kappa_2 m_A^2 m_B\right)\hat{r}_{AB}^j \\
&+ \sum_{B\neq A}\sum_{C\neq A,B} \frac{G^2 m_A m_B m_C}{r_{AB}^2}\left(\frac{2\kappa_1}{r_{AC}} + \frac{\kappa_2}{r_{BC}}\right)\hat{r}_{AB}^j.
\end{aligned} \tag{142}
$$

O termo de aceleração newtoniana a_{newt} para um corpo A pode ser escrito como:

$$
(a_{newt})_A^j = -\frac{(\mathcal{M}_\mathcal{P})_A}{(\mathcal{M}_\mathcal{I})_A}\sum_{B\neq A}\frac{G(\mathcal{M}_\mathcal{A})_B}{r_{AB}^2}\hat{r}_{AB}^j, \tag{143}
$$

onde $(\mathcal{M}_\mathcal{P})_A$ é a massa gravitacional passiva de A, $(\mathcal{M}_\mathcal{I})_A$ é a massa inercial de A e $(\mathcal{M}_\mathcal{A})_B$ é a massa gravitacional ativa de B. Agora vamos escrever o primeiro termo da equação (142) como uma aceleração e compará-lo com o termo newtoniano acima.

$$
\begin{aligned}
(a_{newt})_A^j &= -\frac{1}{m_A}\sum_{B\neq A}\frac{G}{r_{AB}^2}\left(m_A m_B - \frac{2\kappa_1}{3}\Omega_A m_B + 4\kappa_1 \Omega_A m_B + 2\kappa_2 \Omega_B m_A\right)\hat{r}_{AB}^j \\
&= -\frac{m_A}{m_A}\sum_{B\neq A}\frac{G m_B}{r_{AB}^2}\left(1 - \frac{2\kappa_1 \Omega_A}{3m_A} + \frac{4\kappa_1 \Omega_A}{m_A} + \frac{2\kappa_2 \Omega_B}{m_B}\right)\hat{r}_{AB}^j \\
&= -\frac{m_A}{m_A}\sum_{B\neq A}\frac{G m_B}{r_{AB}^2}\left(1 + \frac{10\kappa_1 \Omega_A}{3m_A} + \frac{2\kappa_2 \Omega_B}{m_B}\right)\hat{r}_{AB}^j,
\end{aligned} \tag{144}
$$

por razões que serão explicadas a seguir, as massas m_A não são simplificadas, e devido à

estrutura final que obtemos, supomos que a massa inercial seja da forma:

$$\mathcal{M}_{\mathcal{I}} \equiv m\left(1-\alpha\frac{\Omega}{m}\right), \tag{145}$$

onde α é uma constante arbitrária. Substituindo a massa inercial pela redefinição de acima, encontramos

$$(a_{newt})^j_A = -\frac{m_A}{(\mathcal{M}_{\mathcal{I}})_A}\sum_{B\neq A}\frac{Gm_B}{r^2_{AB}}\left(1+\frac{10\kappa_1\Omega_A}{3m_A}+\frac{2\kappa_2\Omega_B}{m_B}\right)\left(1-\frac{\alpha\Omega_A}{m_A}\right)\hat{r}^j_{AB}, \tag{146}$$

e, negligenciando os termos da ordem de Ω^2, podemos escrever a expressão acima como

$$(a_{newt})^j_A = -\frac{m_A}{(\mathcal{M}_{\mathcal{I}})_A}\sum_{B\neq A}\frac{Gm_B}{r^2_{AB}}\left[1+\left(\frac{10\kappa_1}{3}-\alpha\right)\frac{\Omega_A}{m_A}\right]\left(1+\frac{2\kappa_2\Omega_B}{m_B}\right)\hat{r}^j_{AB}. \tag{147}$$

Desejamos que a massa gravitacional passiva seja igual a massa gravitacional ativa, esse é um requisito para que a *terceira lei de Newton* seja satisfeita: "Existem, portanto, teorias que violam o *princípio da equivalência fraca* ($\mathcal{M}_{\mathcal{P}} \neq \mathcal{M}_{\mathcal{I}}$), mas ainda satisfazem a *terceira lei de Newton* ($\mathcal{M}_{\mathcal{P}} = \mathcal{M}_{\mathcal{A}}$)" [1, p. 716, tradução nossa, grifo nosso]. Como α é arbitrário, podemos estabelecer que

$$\frac{10\kappa_1}{3}-\alpha = 2\kappa_2, \tag{148}$$

e assim temos a igualde $\mathcal{M}_{\mathcal{P}} = \mathcal{M}_{\mathcal{A}}$, tal que:

$$\mathcal{M} \equiv \mathcal{M}_{\mathcal{P}} = \mathcal{M}_{\mathcal{A}} = m\left(1+\frac{2\kappa_2\Omega}{m}\right), \tag{149}$$

$$\mathcal{M}_{\mathcal{I}} = m\left[1-\left(\frac{10\kappa_1}{3}-2\kappa_2\right)\frac{\Omega}{m}\right]. \tag{150}$$

Percebe-se, portanto, que a gravitação newtoniana modificada introduz um efeito de quebra do princípio da queda livre, com a desigualdade entre massa inercial e massa gravitacional de um corpo autogravitante. Embora não faça parte do escopo desse trabalho (e tal violação não se manifesta em um sistema binário), fica claro que uma análise mais detalhada do assunto, sob a luz de dados observacionais, deve ser melhor desenvolvida.

A aceleração newtoniana do corpo A segue da seguinte forma

$$\begin{aligned}(a_{newt})^j_A &= -\frac{m_A}{(\mathcal{M}_{\mathcal{I}})_A}\sum_{B\neq A}\frac{Gm_B}{r^2_{AB}}\left(1+\frac{2\kappa_2\Omega_A}{m_A}\right)\left(1+\frac{2\kappa_2\Omega_B}{m_B}\right)\hat{r}^j_{AB}\\ &= -\frac{1}{(\mathcal{M}_{\mathcal{I}})_A}\sum_{B\neq A}\frac{G\mathcal{M}_A\mathcal{M}_B}{r^2_{AB}}\hat{r}^j_{AB}.\end{aligned} \tag{151}$$

Portanto, a aceleração completa do corpo A fica sendo:

$$a_A^j = -\sum_{B\neq A} \frac{G\mathcal{M}_A\mathcal{M}_B}{(\mathcal{M}_\mathcal{I})_A r_{AB}^2}\hat{r}_{AB}^j + \sum_{B\neq A} \frac{G^2\mathcal{M}_A\mathcal{M}_B}{(\mathcal{M}_\mathcal{I})_A r_{AB}^3}[2\kappa_1\mathcal{M}_B + \kappa_2\mathcal{M}_A]\hat{r}_{AB}^j$$
$$+ \sum_{B\neq A}\sum_{C\neq A,B} \frac{G^2\mathcal{M}_A\mathcal{M}_B\mathcal{M}_C}{(\mathcal{M}_\mathcal{I})_A r_{AB}^2}\left(\frac{2\kappa_1}{r_{AC}} + \frac{\kappa_2}{r_{BC}}\right)\hat{r}_{AB}^j. \tag{152}$$

Repare que, no segundo e terceiro termos, m foi diretamente substituída por $\mathcal{M}$, isso porque continuamos negligenciando termos da ordem de Ω^2 ou superior.

3.4.1 Sistema binário

Considerando um sistema de dois corpos:

$$\vec{a}_A = \left(-\frac{G\mathcal{M}_A\mathcal{M}_B}{(\mathcal{M}_\mathcal{I})_A r^2} + \frac{G^2\mathcal{M}_A\mathcal{M}_B}{(\mathcal{M}_\mathcal{I})_A r^3}[2\kappa_1\mathcal{M}_B + \kappa_2\mathcal{M}_A]\right)\hat{r}. \tag{153}$$

E a aceleração relativa $\vec{a}$ é dada por

$$\begin{aligned}
\vec{a} &= \vec{a}_A - \vec{a}_B \\
&= -\frac{G\mathcal{M}_A\mathcal{M}_B}{r^2}\Bigg[1 - \frac{G}{r}(2\kappa_1\mathcal{M}_B + \kappa_2\mathcal{M}_A) + \frac{(\mathcal{M}_\mathcal{I})_A}{(\mathcal{M}_{\mathcal{I}B})} \\
&\qquad - \frac{G(\mathcal{M}_{\mathcal{I}A})}{r(\mathcal{M}_\mathcal{I})_B}(2\kappa_1\mathcal{M}_A + \kappa_2\mathcal{M}_B)\Bigg]\hat{r} \\
&= -\frac{Gm^*}{r^2}\Bigg[1 - \frac{2\kappa_1 G}{r}\left(\frac{(\mathcal{M}_\mathcal{I})_A\mathcal{M}_A + (\mathcal{M}_\mathcal{I})_B\mathcal{M}_B}{(\mathcal{M}_\mathcal{I})_A + (\mathcal{M}_\mathcal{I})_B}\right) \\
&\qquad - \frac{\kappa_2 G}{r}\left(\frac{(\mathcal{M}_\mathcal{I})_A\mathcal{M}_B + (\mathcal{M}_\mathcal{I})_B\mathcal{M}_A}{(\mathcal{M}_\mathcal{I})_A + (\mathcal{M}_\mathcal{I})_B}\right)\Bigg]\hat{r},
\end{aligned} \tag{154}$$

onde definimos

$$m^* = \left(\frac{\mathcal{M}_A\mathcal{M}_B}{(\mathcal{M}_\mathcal{I})_A} + \frac{\mathcal{M}_A\mathcal{M}_B}{(\mathcal{M}_\mathcal{I})_B}\right), \tag{155}$$

que é a massa kepleriana medida por meios astronômicos. Em um sistema de dois corpos m^*, que carrega a desigualdade entre massa inercial e massa gravitacional, é imensurável observacionalmente, portanto podemos assumir $\mathcal{M}_\mathcal{I} = \mathcal{M}$, e assim temos $m^* = m = \mathcal{M}_A + \mathcal{M}_B$, que é a massa total do sistema [1]. Dessa forma,

$$\vec{a} = -\frac{Gm}{r^2}\left\{1 - \frac{2G}{r}\Big[\kappa_1(m - 2\mu) + \kappa_2\mu\Big]\right\}\hat{r}, \tag{156}$$

sendo $\mu = \mathcal{M}_A\mathcal{M}_B/m$, a massa reduzida do sistema binário.

Tendo em vista que nosso interesse recai sobre sistemas como o Sol-Planeta, é razoável adotar a seguinte aproximação $m \gg \mu$, então

$$\vec{a} = -\frac{Gm}{r^2}\left(1 - \frac{2\kappa_1 Gm}{r}\right)\hat{r}. \tag{157}$$

Vemos, portanto, que, como era de se esperar, a aceleração relativa entre dois corpos interagindo gravitacionalmente apresenta uma modificação em relação ao resultado newtoniano. Dessa forma, a órbita de um sistema binário não mais será uma elipse estática e seus parâmetros irão variar no tempo.

3.4.2 Variação dos elementos orbitais

Para determinar $\left(\frac{d\mu^\alpha}{dt}\right)_{sec}$ utilizaremos o método das órbitas osculantes discutidas na subseção 2.3. As componentes de perturbação da aceleração relativa são

$$\mathcal{R} = \frac{2\kappa_1 G^2 m^2}{r^3}, \qquad \mathcal{S} = 0, \qquad \mathcal{W} = 0. \tag{158}$$

3.4.3 Para a excentricidade orbital

Fazendo uso da equação (65)

$$\begin{aligned}\frac{de}{df} &\approx \frac{p^2}{Gm}\frac{\sin f}{(1+e\cos f)^2}\mathcal{R} \\ &= \frac{p^2}{Gm}\frac{\sin f}{(1+e\cos f)^2}\frac{2\kappa_1 G^2 m^2}{r^3} \\ &= \frac{p^2 2\kappa_1 Gm}{r^3}\frac{\sin f}{(1+e\cos f)^2}.\end{aligned} \tag{159}$$

Substituindo o valor de r pela solução kepleriana, equação (36), e $p = a(1-e^2)$, obtém-se

$$\begin{aligned}\frac{de}{df} &= a^2(1-e^2)^2 2\kappa_1 Gm \frac{(1+e\cos f)^3}{a^3(1-e^2)^3}\frac{\sin f}{(1+e\cos f)^2} \\ &= \frac{2\kappa_1 Gm(1+e\cos f)\sin f}{a(1-e^2)},\end{aligned} \tag{160}$$

tal que Δe:

$$\begin{aligned}\Delta e &= \int_0^{2\pi} \frac{de}{df} df \\ &= \frac{2\kappa_1 Gm}{a(1-e^2)} \int_0^{2\pi} (1 + e\cos f)\sin f df \\ &= 0. \end{aligned} \tag{161}$$

$$\therefore \left(\frac{de}{dt}\right)_{sec} = 0. \tag{162}$$

3.4.4 Para o periélio orbital

Fazendo uso da equação (66)

$$\begin{aligned}\frac{d\omega}{df} &\approx -\frac{p^2}{eGm}\frac{\cos f}{(1+e\cos f)^2}\mathcal{R} \\ &= -\frac{p^2}{eGm}\frac{\cos f}{(1+e\cos f)^2}\frac{2\kappa_1 G^2 m^2}{r^3} \\ &= -\frac{p^2 2\kappa_1 Gm}{er^3}\frac{\cos f}{(1+e\cos f)^2} \\ &= -\frac{a^2(1-e^2)^2 2\kappa_1 Gm}{e}\frac{\cos f}{(1+e\cos f)^2}\frac{(1+e\cos f)^3}{a^3(1-e^2)^3} \\ &= -\frac{2\kappa_1 Gm}{e}\frac{(1+e\cos f)\cos f}{a(1-e^2)}, \end{aligned} \tag{163}$$

de modo que $\Delta\omega$:

$$\begin{aligned}\Delta\omega &= \int_0^{2\pi} \frac{d\omega}{df} df \\ &= -\frac{2\kappa_1 Gm}{ea(1-e^2)} \int_0^{2\pi} (1+e\cos f)\cos f df \\ &= -\frac{2\kappa_1 Gm\pi}{a(1-e^2)}. \end{aligned} \tag{164}$$

Portanto, a variação de ω por tempo de órbita é

$$\left(\frac{d\omega}{dt}\right)_{sec} = -\frac{2\kappa_1 Gm\pi}{Pa(1-e^2)} \tag{165}$$

3.4.5 Restrições observacionais

O avanço do periélio de Mercúrio tem tido sua medida mais precisa com a missão espacial MESSENGER que mostra que [11]

$$\left(\frac{d\omega}{dt}\right)_{sec} = (42,9799 \pm 0,0009)''/\text{século}. \tag{166}$$

Com esse dado observacional, podemos restringir o valor de κ_1, obtendo assim uma condição para que a teoria modificada apresentada aqui esteja de acordo com essa observação. Usamos $G = 6,674 \times 10^{-11}$ m^3/kg·s^2, $m \approx m_{sol} = 1,988 \times 10^{30}$ kg, a excentricidade e semi-eixo maior de Mercúrio $e = 0,205631$ e $a = 57,909 \times 10^9$ m, resultando em

$$\kappa_1 = (-1,62325 \pm 0,00003) \times 10^{-16}\,(\text{m/s})^{-2}. \tag{167}$$

3.4.6 Previsão da Relatividade Geral

A Relatividade Geral prevê [4]

$$\Delta\omega_{RG} = 6\pi \frac{Gm}{ac^2(1-e^2)}. \tag{168}$$

Se igualarmos com o resultado de $\Delta\omega$ encontrado na teoria modificada, temos

$$-\frac{2\kappa_1 Gm\pi}{a(1-e^2)} = 6\pi \frac{Gm}{ac^2(1-e^2)}$$
$$\kappa_1 = -\frac{3}{c^2}. \tag{169}$$

Uma questão que surge naturalmente com essa análise é o fato de surgir a velocidade da luz c em uma teoria não relativística. Nesse sentido, c pode ser interpretado como sendo duas constantes, ϵ_0 e μ_0, de natureza eletromagnética, de maneira que

$$c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}}. \tag{170}$$

Isso mantém o caráter de c como uma constante universal, mas não necessariamente como uma velocidade limite permitida.

Os valores obtidos em (167) e (169), apesar de compartilharem a mesma ordem de grandeza, assumem valores ligeiramente diferentes. Essa variação pode ser explicada a partir dos valores numéricos atribuídos às constantes no cálculo observacional. Pequenas variações nesses valores causam uma certa variação em κ_1.

3.5 Aplicação a um modelo específico

Uma aplicação de interesse é recuperar o resultado obtido na ref. [4], cuja lagrangiana é dada por

$$\mathcal{L} = -\frac{\vec{\nabla}\psi \cdot \vec{\nabla}\psi}{8\pi G_0} + \frac{\omega}{8\pi G_0}\left(\psi\frac{\dot{\sigma}^2}{\sigma^2} - c^4\vec{\nabla}\sigma \cdot \vec{\nabla}\sigma\right) - \rho\sigma\psi. \tag{171}$$

A partir da comparação com a lagrangiana da equação (100), verifica-se que, para que as funções genéricas $k(\sigma)$, $f(\psi,\sigma)$, $g(\psi,\sigma)$ e $h(\sigma)$ deste trabalho reproduzam os resultados da ref. [4], as correspondências apresentadas na Tabela 2 devem ser atendidas. Ainda na tabela 2, estão representadas as funções aplicadas nas soluções de fundo (ψ_0, σ_0) e as derivadas parciais. F indica a expressão que as funções devem assumir.

Tabela 2: Correspondência das funções com relação à ref. [4]. Fonte: produção do autor.

	$k(\sigma)$	$f(\psi,\sigma)$	$g(\psi,\sigma)$	$h(\sigma)$
F	1	ψ/σ^2	c^4	σ
F_0	1	ψ_0/σ_0^2	c^4	σ_0
F_σ	0	$-2\psi_0/\sigma_0^3$	0	1
F_ψ	0	$1/\sigma_0^2$	0	0

Se atendermos essas correspondências do modelo da ref. [4] para a constante

$$\kappa_1 \equiv \frac{\psi_0 k_0 h_\sigma}{\omega g_0 h_0^3}\left(\frac{h_0 k_\sigma}{4k_0} - \frac{g_\psi \psi_0 h_\sigma}{4g_0} + h_\sigma\right), \tag{172}$$

encontramos

$$\kappa_1 = \frac{\psi_0}{\omega c^4 \sigma_0^3}, \tag{173}$$

e se ainda fizermos como a referência, adotando que $\sigma_0 = 1$, e definindo $\tilde{\omega} = \omega c^2/\psi_0$, chegamos ao mesmo resultado obtido pelos autores: $\tilde{\omega} \sim 10^{-2}$. Isso registra confidência em nossos resultados.

Outro modelo que pode gerar particular interesse é o caso em que $k(\sigma) = 1/\sigma$, $f = \tilde{f}/\sigma$, $g = \tilde{g}/\sigma$ e $h(\sigma) = 1$. A lagrangiana fica sendo,

$$\mathcal{L} = -\frac{\vec{\nabla}\psi \cdot \vec{\nabla}\psi}{8\pi G_0 \sigma} + \frac{\omega}{8\pi G_0 \sigma}\left(\tilde{f}(\psi,\sigma)\dot{\sigma}^2 - \tilde{g}(\psi,\sigma)\vec{\nabla}\sigma \cdot \vec{\nabla}\sigma\right) - \rho\psi. \tag{174}$$

Neste modelo, o potencial gravitacional é inteiramente determinado pelo campo ψ, enquanto que o campo σ é explicitamente identificado com a constante gravitacional efetiva, $G_{\text{ef}} = G_0\sigma$. No entanto, sendo $h_\sigma = 0$, nota-se que tanto κ_1 quanto κ_2 se anulam. Isso

implica que a primeira modificação da gravitação newtoniana ocorrerá apenas na terceira ordem aproximativa, e as órbitas de um sistema binário se mantêm fechadas (elipses estáticas) até a segunda ordem.

4 Conclusão

Este trabalho buscou analisar uma teoria gravitacional newtoniana modificada. No capítulo 2, foram revisadas as bases da gravitação newtoniana, com o objetivo principal de analisar o problema de Kepler e os mecanismos de cálculo do avanço do periélio orbital. Verificou-se que a teoria newtoniana não explica totalmente o avanço do periélio de Mercúrio: um sistema binário possui órbita elíptica estática e, mesmo quando considerados os efeitos perturbativos dos demais planetas, estes não são suficientes para dar conta do que é observado. Em seguida, no capítulo 3, foi estudada uma proposta de modificação genérica da lagrangiana gravitacional newtoniana e analisadas as condições necessárias para que tais modelos sejam capazes de reproduzir teoricamente o valor obtido observacionalmente.

A modificação na teoria consistiu na inserção de um segundo campo escalar na lagrangiana, generalizando a proposta inicialmente lançada na referência [7]. A partir de um estudo perturbativo aplicado a um sistema binário e considerando Sol e planeta como corpos extensos, mostrou-se como o potencial gravitacional newtoniano é modificado. Isso permitiu determinar também teoricamente o avanço do periélio orbital como consequência dessa modificação. Por fim, usando dados observacionais mais recentes, foi determinado um valor numérico para a constante $\kappa_1 = (-1,62325 \pm 0,00003) \times 10^{-16}\,(\mathrm{m/s})^{-2}$ que mantém o modelo consistente com as observações. Uma vez que κ_1 depende das funções livres que aparecem na lagrangiana [cf. (172)], esse vínculo que obtemos mostra como uma modificação da gravitação newtoniana pode ser compatível com as observações.

A continuidade dessa pesquisa pode ser feita estudando correções para o potencial até a terceira ordem. O caso em que $h(\sigma) = 1$ é de particular interesse, pois nesse cenário σ deixa de estar acoplado à densidade de matéria; no entanto, isso implica em $h_\sigma = 0$, de modo que as correções só aparecem a partir da terceira ordem perturbativa. Além disso, mostrou-se também que inevitavelmente a teoria analisada introduz uma violação na igualdade entre massa inercial e gravitacional, necessitando-se desenvolver mais estudos sobre essa questão.

Referências

1 POISSON, Eric; WILL, Clifford M. **Gravity: Newtonian, Post-Newtonian, Relativistic**. Cambridge: Cambridge University Press, 2014.

2 NUSSENZVEIG, Herch M. **Curso de Física básica**. São Paulo: Edgard Blücher, 2002. v. 1.

3 FABRIS, Júlio C.; TONIATO, Júnior D.; VELTEN, Hermano. **Gravitação**. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2021.

4 ESCÓRCIO, Felipe S. et al. Celestial mechanics in newtonian-like gravity with variable G. **The European Physical Journal Plus**, v. 138, n. 12, 2023.

5 WEBER, Hans Peter. The perihelion precession of the planets indicates a variability of the gravitational constant. **Journal of Modern Physics**, v. 14, p. 670–675, 2023.

6 LAZAR, Markus. Gradient modification of newtonian gravity. **Physical Review D**, v. 102, n. 9, p. 096002, 2020.

7 FABRIS, Júlio C. et al. Newtonian-like gravity with variable g. **The European Physical Journal Plus**, v. 136, n. 2, 2021.

8 FABRIS, Júlio C. et al. Stellar structure in a newtonian theory with variable g. **Physics**, v. 3, n. 4, p. 1123–1132, 2021.

9 THORNTON, Stephen T.; MARION, Jerry B. **Dinâmica Clássica de Partículas e Sistemas**. São Paulo: Cengage Learning, 2011.

10 OLIVEIRA, André P.; TONIATO, Júnior D. **Teorias newtonianas da gravitação com acomplamento variável**. Relatório de Iniciação Científica — Universidade Federal do Espírito Santo, Campus Alegre, 2023. Disponível em: <http://toniato.cosmo-ufes.org/uploads/1/3/7/0/13701821/relatorio-parcial-andre.pdf>. Acesso em: ago. 2025.

11 PARK, Ryan S. et al. Precession of mercury's perihelion from ranging to the messenger spacecraft. **The Astronomical Journal**, v. 153, n. 3, p. 121, 2017.

A Solução da EDO de Kepler

Desejamos encontrar a solução de

$$u'' + u = \frac{GM}{h^2}.$$

A equação diferencial acima tem como equação homogênea associada

$$u'' + u = 0.$$

A equação auxiliar da equação acima é

$$\begin{aligned} \lambda^2 + 1 &= 0 \\ \lambda &= \pm\sqrt{-1} \\ \lambda &= \pm i. \end{aligned}$$

Dessa forma, a função complementar se apresenta como:

$$u_c = Ae^{-i\theta} + Be^{i\theta}.$$

Agora, supomos que a solução particular seja da forma

$$u_p = constante = C.$$

C satisfaz a EDO se

$$\begin{aligned} C'' + C &= \frac{GM}{h^2} \\ C &= \frac{GM}{h^2}. \end{aligned}$$

Por fim, a solução geral é dada por:

$$\begin{aligned} u &= u_c + u_p \\ u(\theta) &= Ae^{-i\theta} + Be^{i\theta} + \frac{GM}{h^2}. \end{aligned}$$

Usando a fórmula de Euler[5]:

$$\begin{aligned} u &= A(\cos\theta - i\sin\theta) + B(\cos\theta + i\sin\theta) + \frac{GM}{h^2} \\ &= (A+B)\cos\theta + (B-A)i\sin\theta + \frac{GM}{h^2}. \end{aligned}$$

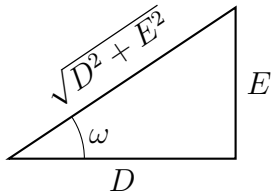
Redefinindo as constantes:

$$u = D\cos\theta + E\sin\theta + \frac{GM}{h^2}.$$

Multiplicando e dividindo por $\sqrt{D^2+E^2}$:

$$u = \sqrt{D^2+E^2}\left(\frac{D}{\sqrt{D^2+E^2}}\cos\theta + \frac{E}{\sqrt{D^2+E^2}}\sin\theta\right) + \frac{GM}{h^2}.$$

Note que o termo $\sqrt{D^2+E^2}$ pode ser interpretado como a hipotenusa de um triângulo retângulo:



Nomeando $F \equiv \sqrt{D^2+E^2}$, temos

$$\begin{aligned} u &= F(\cos\omega\cos\theta + \sin\omega\sin\theta) + \frac{GM}{h^2} \\ &= F\cos(\theta-\omega) + \frac{GM}{h^2}. \end{aligned}$$

Retornando para a variável inicial r (lembre-se $u = 1/r$):

$$\begin{aligned} r &= \frac{1}{F\cos(\theta-\omega) + \frac{GM}{h^2}} \\ &= \frac{h^2}{GM}\frac{1}{\left(\frac{h^2F}{GM}\cos(\theta-\omega)+1\right)} \\ &= \frac{p}{1+e\cos(\theta-\omega)} \end{aligned}$$

de forma que $e \equiv h^2F/(GM)$ e $p \equiv h^2/(GM)$.

[5] $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$ e $e^{-i\theta} = \cos\theta - i\sin\theta$.

B Simplificação da aceleração perturbativa

Desejamos simplificar a expressão

$$\vec{a}_p = -Gm_J \left(\frac{\vec{r} - \vec{R}}{|\vec{r} - \vec{R}|^3} + \frac{\hat{R}}{R^2} \right).$$

Desenvolvendo o termo $|\vec{r} - \vec{R}|^3$:

$$\begin{aligned} |\vec{r} - \vec{R}|^3 &= \left[\sqrt{(\vec{r} - \vec{R})^2} \right]^3 \\ &= \left[\sqrt{r^2 - 2(\vec{r} \cdot \vec{R}) + R^2} \right]^3 \\ &= \left[\sqrt{r^2 - 2rR(\hat{r} \cdot \hat{R}) + R^2} \right]^3. \end{aligned}$$

Evidenciando R^2:

$$|\vec{r} - \vec{R}|^3 = \left[R\sqrt{\frac{r^2}{R^2} - \frac{2r}{R}(\hat{r} \cdot \hat{R}) + 1} \right]^3.$$

$$\therefore \ \vec{a}_p = -Gm_J \left\{ \frac{\vec{r} - \vec{R}}{\left[R\sqrt{\frac{r^2}{R^2} - \frac{2r}{R}(\hat{r} \cdot \hat{R}) + 1} \right]^3} + \frac{\hat{R}}{R^2} \right\}.$$

Como $R \gg r$, é feita uma aproximação em série de Taylor[6] de $f(\frac{r}{R}) = \sqrt{1 - \frac{2r}{R}(\hat{r} \cdot \hat{R}) + \frac{r^2}{R^2}}$ em torno de $\frac{r}{R} = 0$ até a primeira ordem:

$$\begin{aligned} f\left(\frac{r}{R}\right) &= \overbrace{\sqrt{1}}^{\text{ordem zero}} + \overbrace{\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{1}}\left(-2(\hat{r} \cdot \hat{R})\right)\frac{r}{R}}^{\text{primeira ordem}} + \cdots \\ &\approx 1 - \frac{r}{R}(\hat{r} \cdot \hat{R}), \end{aligned}$$

simplificando a aceleração perturbativa para

$$\begin{aligned} \vec{a}_p &= -Gm_J \left\{ \frac{\vec{r} - \vec{R}}{\left[R\left(1 - \frac{r}{R}(\hat{r} \cdot \hat{R})\right) \right]^3} + \frac{\hat{R}}{R^2} \right\} \\ &= -\frac{Gm_J}{R^3} \left\{ \frac{\vec{r} - \vec{R}}{\left[1 - \frac{r}{R}(\hat{r} \cdot \hat{R}) \right]^3} + R\hat{R} \right\}. \end{aligned}$$

[6] $f(x) = f(a) + f'(a)(x - a) + \cdots$

Agora expandimos o produto notável abaixo, desconsiderando os termos de ordem menores ou iguais a $\left(\frac{r}{R}\right)^2$:

$$\begin{aligned}\left[1-\frac{r}{R}(\hat{r}\cdot\hat{R})\right]^3 &= 1-3\frac{r}{R}(\hat{r}\cdot\hat{R})+3\left[\frac{r}{R}(\hat{r}\cdot\hat{R})\right]^2-\left[\frac{r}{R}(\hat{r}\cdot\hat{R})\right]^3\\ &\approx 1-3\frac{r}{R}(\hat{r}\cdot\hat{R})\end{aligned}$$

$$\therefore\ \vec{a}_p = -\frac{Gm_J}{R^3}\left\{\frac{\vec{r}-\vec{R}}{\left[1-3\frac{r}{R}(\hat{r}\cdot\hat{R})\right]}+R\hat{R}\right\}.$$

Para eliminar $(\hat{r}\cdot\hat{R})$ do denominador, o caminho é realizar mais uma aproximação em série de Taylor:

$$\begin{aligned}\frac{1}{1-3\frac{r}{R}(\hat{r}\cdot\hat{R})} &= 1+3\frac{r}{R}(\hat{r}\cdot\hat{R})+\cdots\\ &\approx 1+3\frac{r}{R}(\hat{r}\cdot\hat{R}).\end{aligned}$$

Resultando em:

$$\begin{aligned}\vec{a}_p &= -\frac{Gm_J}{R^3}\left\{\left[\left(\vec{r}-\vec{R}\right)\left(1+3\frac{r}{R}(\hat{r}\cdot\hat{R})\right)\right]+R\hat{R}\right\}\\ &= -\frac{Gm_J}{R^3}\left[\vec{r}+3\frac{r}{R}\vec{r}(\hat{r}\cdot\hat{R})-\vec{R}-3\frac{r}{R}\vec{R}(\hat{r}\cdot\hat{R})+\vec{R}\right]\\ &= -\frac{Gm_Jr}{R^3}\left[\hat{r}+3\frac{\vec{r}}{R}(\hat{r}\cdot\hat{R})-3(\hat{r}\cdot\hat{R})\hat{R}\right].\end{aligned}$$

Desconsiderando os termos de $\frac{r}{R}$, resta

$$\vec{a}_p = -\frac{Gm_Jr}{R^3}\left[\hat{r}-3(\hat{r}\cdot\hat{R})\hat{R}\right].$$

C Código Wolfram Mathematica

A função que deve ser integrada:

```
f[x_] := 1/E*p^2/(G*m)*(-(Cos[x]/(1 + e*Cos[x])^2)*
      (-(G*j)/R^3*p/(1 + e*Cos[x])*(1 - 3*Cos[x + w - F]^2))
    + (2 + e*Cos[x])/(1 + e*Cos[x])^3*
      Sin[x]*(-3*(G*j)/R^3*p/(1 + e*Cos[x])*
      Sin[x + w - F]*Cos[x + w - F]))
```

Mesmo o *Mathematica* tem dificuldades em integrar essa função devido ao denominador. Passamos então para uma nova coordenada u:

```
c[u_] := (Cos[u] - e)/(1 - e*Cos[u])

s[u_] := (Sqrt[1 - e^2]*Sin[u])/(1 - e*Cos[u])
```

Primeiro expandimos a função $f(x)$, substituímos pela nova variável e pedimos para simplificar:

```
f[x] // TrigExpand

% /. Cos[x] -> c[u] /. Sin[x] -> s[u]

Simplify[%]
```

E agora podemos integrar:

```
int = % * Sqrt[1 - e^2]/(1 - e*Cos[u]) // Simplify

Integrate[int, {u, 0, 2*Pi}, Assumptions -> e > 0 && e < 1]
```

D Lagrangiana modificada

Desejamos encontrar as equações de campo para ψ e σ a partir da lagrangiana abaixo.

$$\mathcal{L} = \frac{k(\sigma)\vec{\nabla}\psi\cdot\vec{\nabla}\psi}{8\pi G_0} - \frac{\omega}{8\pi G_0}\left(f(\psi,\sigma)\dot{\sigma}^2 - g(\psi,\sigma)\vec{\nabla}\sigma\cdot\vec{\nabla}\sigma\right) + \rho h(\sigma)\psi$$

Equação de campo para ψ:

$$\vec{\nabla}\cdot\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\vec{\nabla}\psi} - \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\psi} = 0$$

$$\vec{\nabla}\cdot\left(\frac{k(\sigma)\vec{\nabla}\psi}{4\pi G_0}\right) - \left[-\frac{\omega}{8\pi G_0}\left(f_\psi\dot{\sigma}^2 - g_\psi\vec{\nabla}\sigma\cdot\vec{\nabla}\sigma\right) + \rho h(\sigma)\right] = 0$$

$$\frac{k(\sigma)\nabla^2\psi}{4\pi G_0} + \frac{\omega}{8\pi G_0}\left(f_\psi\dot{\sigma}^2 - g_\psi\vec{\nabla}\sigma\cdot\vec{\nabla}\sigma\right) - \rho h(\sigma) = 0$$

$$k(\sigma)\nabla^2\psi + \frac{\omega}{2}\left(f_\psi\dot{\sigma}^2 - g_\psi\vec{\nabla}\sigma\cdot\vec{\nabla}\sigma\right) = 4\pi G_0\rho h(\sigma)$$

Equação de campo para σ:

$$\vec{\nabla}\cdot\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\vec{\nabla}\sigma} + \frac{d}{dt}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\sigma}} - \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\sigma} = 0$$

$$\frac{\omega}{4\pi G_0}\vec{\nabla}\cdot[g(\psi,\sigma)\vec{\nabla}\sigma] - \frac{\omega}{4\pi G_0}f(\psi,\sigma)\ddot{\sigma} - \frac{k_\sigma\vec{\nabla}\psi\cdot\vec{\nabla}\psi}{8\pi G_0} + \frac{\omega}{8\pi G_0}\left(f_\sigma\dot{\sigma}^2 - g_\sigma\vec{\nabla}\sigma\cdot\vec{\nabla}\sigma\right) - \rho\psi h_\sigma = 0,$$

aplicando a regra do produto para o divergente e multiplicando tudo por $\frac{4\pi G_0}{\omega}$,

$$\vec{\nabla}g(\psi,\sigma)\vec{\nabla}\sigma + g(\psi,\sigma)\nabla^2\sigma - f(\psi,\sigma)\ddot{\sigma} - \frac{k_\sigma\vec{\nabla}\psi\cdot\vec{\nabla}\psi}{2\omega} + \frac{f_\sigma\dot{\sigma}^2}{2} - \frac{g_\sigma\vec{\nabla}\sigma\cdot\vec{\nabla}\sigma}{2} - \frac{4\pi G_0\rho\psi h_\sigma}{\omega} = 0$$

$$(g_\psi\vec{\nabla}\psi + g_\sigma\vec{\nabla}\sigma)\vec{\nabla}\sigma + g(\psi,\sigma)\nabla^2\sigma - f(\psi,\sigma)\ddot{\sigma} - \frac{k_\sigma\vec{\nabla}\psi\cdot\vec{\nabla}\psi}{2\omega} + \frac{f_\sigma\dot{\sigma}^2}{2} - \frac{g_\sigma\vec{\nabla}\sigma\cdot\vec{\nabla}\sigma}{2} = \frac{4\pi G_0\rho\psi h_\sigma}{\omega}$$

$$g_\psi\vec{\nabla}\psi\cdot\vec{\nabla}\sigma + g_\sigma\vec{\nabla}\sigma\cdot\vec{\nabla}\sigma + g(\psi,\sigma)\nabla^2\sigma - f(\psi,\sigma)\ddot{\sigma} - \frac{k_\sigma\vec{\nabla}\psi\cdot\vec{\nabla}\psi}{2\omega} + \frac{f_\sigma\dot{\sigma}^2}{2} - \frac{g_\sigma\vec{\nabla}\sigma\cdot\vec{\nabla}\sigma}{2} = \frac{4\pi G_0\rho\psi h_\sigma}{\omega},$$

resultando em

$$g(\psi,\sigma)\nabla^2\sigma - f(\psi,\sigma)\ddot{\sigma} - k_\sigma\frac{\vec{\nabla}\psi\cdot\vec{\nabla}\psi}{2\omega} + g_\sigma\frac{\vec{\nabla}\sigma\cdot\vec{\nabla}\sigma}{2}$$
$$+g_\psi\vec{\nabla}\psi\cdot\vec{\nabla}\sigma + f_\sigma\frac{\dot{\sigma}^2}{2} = \frac{4\pi G_0\rho\psi h_\sigma}{\omega}.$$

E Análise perturbativa

Para ψ:

$$k(\sigma)\nabla^2\psi + \frac{\omega}{2}\left(f_\psi\dot{\sigma}^2 - g_\psi\vec{\nabla}\sigma\cdot\vec{\nabla}\sigma\right) = 4\pi G_0\rho h(\sigma).$$

Abaixo estão as aproximações em série de Taylor em torno de σ_0 até a segunda ordem.

A função $k(\sigma)$:

$$\begin{aligned} k(\sigma) &\approx k(\sigma_0) + k'(\sigma_0)(\sigma - \sigma_0) \\ &= k_0 + k_\sigma(\sigma_1 + \sigma_2) \\ &= k_0 + k_\sigma\sigma_1 + k_\sigma\sigma_2. \end{aligned}$$

A função $h(\sigma)$:

$$\begin{gathered} Idem\ k(\sigma) \\ h(\sigma) = h_0 + h_\sigma\sigma_1 + h_\sigma\sigma_2. \end{gathered}$$

Para g_ψ, primeiro fazemos:

$$\begin{aligned} g(\psi,\sigma) &\approx g(\psi_0,\sigma_0) + \frac{\partial g}{\partial\psi}(\psi_0)(\psi - \psi_0) + \frac{\partial g}{\partial\sigma}(\sigma_0)(\sigma - \sigma_0) \\ &= g_0 + g_\psi(\psi_1 + \psi_2) + g_\sigma(\sigma_1 + \sigma_2) \\ &= g_0 + g_\psi\psi_1 + g_\psi\psi_2 + g_\sigma\sigma_1 + g_\sigma\sigma_2, \end{aligned}$$

tal que

$$g_\psi(\psi,\sigma) = g_\psi.$$

Apesar do abuso de notação, lembre-se de que o termo do lado direito refere-se a $\frac{\partial g}{\partial\psi}(\psi_0)$.

A expansão de $\vec{\nabla}\sigma\cdot\vec{\nabla}\sigma$:

$$\begin{aligned} \vec{\nabla}\sigma\cdot\vec{\nabla}\sigma &= (\vec{\nabla}\sigma)^2 \\ &= (\vec{\nabla}\sigma_1 + \vec{\nabla}\sigma_2)^2 \\ &= (\vec{\nabla}\sigma_1)^2 + 2(\vec{\nabla}\sigma_1\cdot\vec{\nabla}\sigma_2) + (\vec{\nabla}\sigma_2)^2 \\ &= (\vec{\nabla}\sigma_1)^2, \end{aligned}$$

visto que os demais termos são de ordem superior a 2.

Substituindo as aproximações apresentadas na equação de campo e desconsiderando termos de ordem 3 ou superior, os passos são os seguintes

$$
\begin{aligned}
(k_0 + k_\sigma\sigma_1)(\nabla^2\psi_1 + \nabla^2\psi_2) - \frac{\omega}{2}g_\psi(\vec{\nabla}\sigma_1)^2 &= 4\pi G_0\rho(h_0 + h_\sigma\sigma_1) \\
k_0\nabla^2\psi_1 + k_\sigma\sigma_1\nabla^2\psi_1 + k_0\nabla^2\psi_2 - \frac{\omega}{2}g_\psi(\vec{\nabla}\sigma_1)^2 &= 4\pi G_0\rho h_0 + 4\pi G_0\rho h_\sigma\sigma_1 \\
k_\sigma\sigma_1\nabla^2\psi_1 + k_0\nabla^2\psi_2 - \frac{\omega}{2}g_\psi(\vec{\nabla}\sigma_1)^2 &= 4\pi G_0\rho h_\sigma\sigma_1 \\
k_0\nabla^2\psi_2 &= \frac{\omega}{2}g_\psi(\vec{\nabla}\sigma_1)^2 + 4\pi G_0\rho h_\sigma\sigma_1 - \frac{4\pi G_0\rho h_0 k_\sigma\sigma_1}{k_0} \\
\therefore\ \nabla^2\psi_2 &= \frac{\omega}{2k_0}g_\psi(\vec{\nabla}\sigma_1)^2 + \frac{4\pi G_0\rho\sigma_1}{k_0}\left(h_\sigma - \frac{h_0 k_\sigma}{k_0}\right).
\end{aligned}
$$

Usando a solução de σ_1, chegamos que

$$
\begin{aligned}
\nabla^2\psi_2 &= \frac{\omega}{2k_0}g_\psi\left(-\frac{G_0\psi_0 h_\sigma}{\omega g_0}\frac{\vec{\nabla}U}{G}\right)^2 + \frac{4\pi G_0\rho}{k_0}\left(-\frac{G_0\psi_0 h_\sigma}{\omega g_0}\frac{U}{G}\right)\left(h_\sigma - \frac{h_0 k_\sigma}{k_0}\right) \\
&= \frac{G_0^2\psi_0^2 h_\sigma^2}{2G^2\omega k_0 g_0^2}g_\psi(\vec{\nabla}U)^2 - \frac{4\pi G_0^2\psi_0 h_\sigma^2\rho}{G\omega k_0 g_0}U + \frac{4\pi G_0^2\psi_0 h_0 h_\sigma k_\sigma\rho}{G\omega k_0^2 g_0}U,
\end{aligned}
$$

usando o resultado do apêndice F,

$$
\begin{aligned}
\nabla^2\psi_2 &= \left(\frac{G_0}{G}\right)^2\left[\frac{\psi_0^2 h_\sigma^2}{2\omega k_0 g_0^2}g_\psi\nabla^2\left(\frac{U^2}{2} - \Phi_2\right) + \left(\frac{\psi_0 h_\sigma^2}{\omega k_0 g_0} - \frac{\psi_0 h_0 h_\sigma k_\sigma}{\omega k_0^2 g_0}\right)\nabla^2\Phi_2\right] \\
&= \frac{\psi_0 h_\sigma}{\omega k_0 g_0}\left(\frac{G_0}{G}\right)^2\left[\frac{\psi_0 h_\sigma}{2g_0}g_\psi\nabla^2\left(\frac{U^2}{2} - \Phi_2\right) + \left(h_\sigma - \frac{h_0 k_\sigma}{k_0}\right)\nabla^2\Phi_2\right] \\
\therefore\ \psi_2 &= \frac{\psi_0 h_\sigma}{\omega k_0 g_0}\left(\frac{G_0}{G}\right)^2\left[\frac{\psi_0 h_\sigma}{2g_0}g_\psi\left(\frac{U^2}{2} - \Phi_2\right) + \left(h_\sigma - \frac{h_0 k_\sigma}{k_0}\right)\Phi_2\right].
\end{aligned}
$$

Para σ:

$$
\begin{aligned}
g(\psi,\sigma)\nabla^2\sigma - f(\psi,\sigma)\ddot{\sigma} - k_\sigma\frac{(\vec{\nabla}\psi\cdot\vec{\nabla}\psi)}{2\omega} + \frac{g_\sigma(\vec{\nabla}\sigma\cdot\vec{\nabla}\sigma)}{2} + g_\psi(\vec{\nabla}\psi\cdot\vec{\nabla}\sigma) \\
- \frac{f_\sigma\dot{\sigma}^2}{2} = \frac{4\pi G_0}{\omega}\rho\psi h_\sigma.
\end{aligned}
$$

As aproximações que serão feitas aqui são parecidas com a que foram feitas para ψ, então o tratamento será mais direto.

$$(g_0 + g_\psi\psi_1 + g_\psi\psi_2 + g_\sigma\sigma_1 + g_\sigma\sigma_2)(\nabla^2\sigma_1 + \nabla^2\sigma_2) - k_\sigma\frac{(\vec{\nabla}\psi_1)^2}{2\omega} + g_\sigma\frac{(\vec{\nabla}\sigma_1)^2}{2}$$
$$+g_\psi(\vec{\nabla}\psi_1\cdot\vec{\nabla}\sigma_1) = \frac{4\pi G_0\rho}{\omega}(\psi_0 + \psi_1 + \psi_2)[h_\sigma + h_{\sigma\sigma}(\sigma_1 + \sigma_2)],$$

$$g_0\nabla^2\sigma_1 + g_0\nabla^2\sigma_2 + g_\psi\psi_1\nabla^2\sigma_1 + g_\sigma\sigma_1\nabla^2\sigma_1 - k_\sigma\frac{(\vec{\nabla}\psi_1)^2}{2\omega} + g_\sigma\frac{(\vec{\nabla}\sigma_1)^2}{2}$$
$$+g_\psi(\vec{\nabla}\psi_1\cdot\vec{\nabla}\sigma_1) = \frac{4\pi G_0\rho\psi_0 h_\sigma}{\omega} + \frac{4\pi G_0\rho\psi_0 h_{\sigma\sigma}\sigma_1}{\omega} + \frac{4\pi G_0\rho\psi_1 h_\sigma}{\omega}.$$

Continuando a simplificação e isolando $g_0\nabla^2\sigma_2$:

$$g_0\nabla^2\sigma_2 + g_\psi\psi_1\nabla^2\sigma_1 + g_\sigma\sigma_1\nabla^2\sigma_1 = k_\sigma\frac{(\vec{\nabla}\psi_1)^2}{2\omega} - g_\sigma\frac{(\vec{\nabla}\sigma_1)^2}{2} - g_\psi(\vec{\nabla}\psi_1\cdot\vec{\nabla}\sigma_1)$$
$$+\frac{4\pi G_0\rho\psi_0 h_{\sigma\sigma}\sigma_1}{\omega} + \frac{4\pi G_0\rho\psi_1 h_\sigma}{\omega},$$

$$\therefore\ g_0\nabla^2\sigma_2 = k_\sigma\frac{(\vec{\nabla}\psi_1)^2}{2\omega} - g_\sigma\frac{(\vec{\nabla}\sigma_1)^2 + 2\sigma_1\nabla^2\sigma_1}{2} - g_\psi[(\vec{\nabla}\psi_1\cdot\vec{\nabla}\sigma_1) + \psi_1\nabla^2\sigma_1]$$
$$+\frac{4\pi G_0\rho\psi_0 h_{\sigma\sigma}\sigma_1}{\omega} + \frac{4\pi G_0\rho\psi_1 h_\sigma}{\omega}.$$

Usando as soluções de ψ_1 e σ_1, chegamos a:

$$g_0\nabla^2\sigma_2 = \frac{k_\sigma}{2\omega}\left(-\frac{G_0h_0}{k_0}\frac{\vec{\nabla}U}{G}\right)^2 - \frac{g_\sigma}{2}\left[\left(-\frac{G_0\psi_0h_\sigma}{\omega g_0}\frac{\vec{\nabla}U}{G}\right)^2 + 2\left(-\frac{G_0\psi_0h_\sigma}{\omega g_0}\frac{U}{G}\right)\left(-\frac{G_0\psi_0h_\sigma}{\omega g_0}\frac{\nabla^2U}{G}\right)\right]$$
$$- g_\psi\left[\left(-\frac{G_0h_0}{k_0}\frac{\vec{\nabla}U}{G}\right)\cdot\left(-\frac{G_0\psi_0h_\sigma}{\omega g_0}\frac{\vec{\nabla}U}{G}\right) + \left(-\frac{G_0h_0}{k_0}\frac{U}{G}\right)\left(-\frac{G_0\psi_0h_\sigma}{\omega g_0}\frac{\nabla^2U}{G}\right)\right]$$
$$+\frac{4\pi G_0\rho\psi_0h_{\sigma\sigma}}{\omega}\left(-\frac{G_0\psi_0h_\sigma}{\omega g_0}\frac{U}{G}\right) + \frac{4\pi G_0\rho h_\sigma}{\omega}\left(-\frac{G_0h_0}{k_0}\frac{U}{G}\right)$$

$$g_0\nabla^2\sigma_2 = \frac{G_0^2h_0^2k_\sigma}{2G^2\omega k_0^2}\nabla^2\left(\frac{U^2}{2} - \Phi_2\right) - \frac{g_\sigma}{2}\left[\frac{G_0^2\psi_0^2h_\sigma^2}{G^2\omega^2g_0^2}\nabla^2\left(\frac{U^2}{2} - \Phi_2\right) + 2\frac{G_0^2\psi_0^2h_\sigma^2}{G^2\omega^2g_0^2}\nabla^2\Phi_2\right]$$
$$- g_\psi\left[\frac{G_0^2\psi_0h_0h_\sigma}{G^2\omega k_0g_0}\nabla^2\left(\frac{U^2}{2} - \Phi_2\right) + \frac{G_0^2\psi_0h_0h_\sigma}{G^2\omega k_0g_0}\nabla^2\Phi_2\right] + \frac{G_0^2\psi_0^2h_\sigma h_{\sigma\sigma}}{G^2\omega^2g_0}\nabla^2\Phi_2$$
$$+\frac{G_0^2h_0h_\sigma}{G^2\omega k_0}\nabla^2\Phi_2$$

$$\therefore\ \sigma_2 = \frac{1}{\omega g_0}\left(\frac{G_0}{G}\right)^2 \left\{ \frac{h_0^2 k_\sigma}{2k_0^2}\left(\frac{U^2}{2} - \Phi_2\right) - \frac{g_\sigma}{2}\left[\frac{\psi_0^2 h_\sigma^2}{\omega g_0^2}\left(\frac{U^2}{2} + \Phi_2\right)\right] \right.$$
$$\left. -g_\psi \left(\frac{\psi_0 h_0 h_\sigma}{k_0 g_0}\frac{U^2}{2}\right) + \left(\frac{\psi_0^2 h_\sigma h_{\sigma\sigma}}{\omega g_0} + \frac{h_0 h_\sigma}{k_0}\right)\Phi_2 \right\}$$

F O Laplaciano

$$
\begin{aligned}
\vec{\nabla} U^2 &= 2U\vec{\nabla} U \\
\vec{\nabla}\cdot(\vec{\nabla} U^2) &= \vec{\nabla}\cdot(2U\vec{\nabla} U) \\
\nabla^2 U^2 &= 2\vec{\nabla} U\cdot\vec{\nabla} U + 2U\nabla^2 U.
\end{aligned}
$$

Note que

$$
\nabla^2\Phi_2 = -4\pi G\rho U \qquad \Rightarrow \qquad \nabla^2\Phi_2 = U\nabla^2 U.
$$

Com isso encontramos

$$
\begin{aligned}
\nabla^2 U^2 &= 2(\vec{\nabla} U)^2 + 2\nabla^2\Phi_2 \\
\therefore\ (\vec{\nabla} U)^2 &= \nabla^2\left(\frac{U^2}{2} - \Phi_2\right).
\end{aligned}
$$