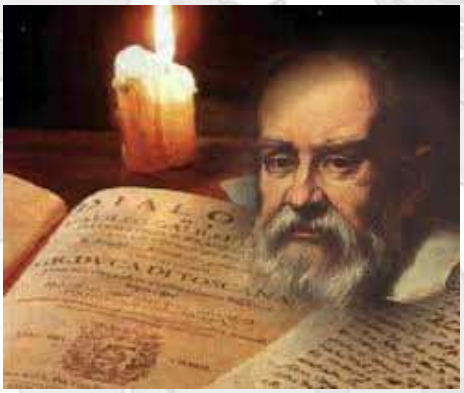
Apostila de física experimental – CCA UFES



UNIVERSIDADE FEDERAL DO ESPÍRITO SANTO
DOCETE OMNES GENTES

Sumário

Sumário **6**

1 Caixa de Ferramentas **7**

1.1 Introdução à teoria dos erros - Prática laboratorial 8

1.2 Medida 9

1.3 ERRO E INCERTEZA 10

1.3.1 Tipos de Erros 10

1.3.2 Calculo do erro aleatório provável 12

1.3.3 Erro de escala 13

1.3.4 Erro de escala em instrumentos 14

1.3.5 Erro relativo percentual 14

1.4 Propagação de erros 15

1.4.1 Propagação de erros básica 15

1.4.2 Erro propagado nas operações básicas 15

1.4.3 Exercícios 17

1.5 ALGARISMOS SIGNIFICATIVOS 18

1.5.1 Noções gerais sobre algarismos significativos 18

1.5.2 Exemplos 19

1.5.3 Exercício: 19

1.6 ARREDONDAMENTOS 21

1.7 EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO 22

1.8 CONSTRUÇÃO DE GRÁFICOS 23

1.8.1 CÁLCULO PARA MELHOR ESCALA 24

1.8.2 Origem 26

1.8.3 Identificação dos pontos 27

1.9 Interpolação de Tabelas 29

1.9.1 EXEMPLO 29

1.10 Ajuste pelo método dos mínimos quadrados 31

1.10.1 Exemplo: Queda livre e aceleração da gravidade 32

1.10.2 Exemplo: Movimento Retilíneo Uniforme (MRU) 32

1.11 Representação de Incertezas em Gráficos – Barra de Erros 34

1.11.1 Exemplo introdutório: 34

1.11.2 Reta média 35

1.11.3 Coeficiente angular da reta média 35

1.11.4 Incerteza do coeficiente angular da reta média 36

1.12 REFERENCIAS 38

1.13 Aula de Instrumentação 39

Capítulo 1

Caixa de Ferramentas

Neste capítulo estudamos as ferramentas que nos auxiliaram a entender melhor alguns fatores relevantes na coleta e tratamento de dados experimentais.

UNIVERSIDADE FEDERAL DO ESPÍRITO SANTO
DOCETE OMNES GENTES

1.1 Introdução à teoria dos erros - Prática laboratorial

Ao iniciarmos um curso, a primeira coisa que nos vem à cabeça é: "O que eu faço com isso?, qual a utilidade desse assunto?, onde vou empregá-lo no meu dia-a-dia?".

Muitos alunos encontram dificuldades na aprendizagem da Física pelo fato de serem muitos conceitos, teorias e fórmulas matemáticas, enquadrando-se, na maioria das vezes, fora de seus contextos.

Como sabemos, a Física é a ciência das propriedades da matéria e das forças naturais. Suas formulações são em geral expressas em linguagem matemática. Mas, como será possível a Física comportar tantas formulações e modelos matemáticos através da observação da natureza? A partir daí nasce a experimentação, pois através dela, somos impulsionados e instigados a querer saber o que realmente está por trás de tantos fenômenos que nos rodeiam, como se fossem espécies de pistas. Entretanto, também é preciso imaginação para criar, a partir dessas pistas, as grandes generalizações. Esse processo de imaginação é tão difícil que há uma divisão de trabalhos na Física, onde existem físicos teóricos que imaginam, deduzem e descobrem as novas leis e físicos experimentais que experimentam, imaginam, deduzem e descobrem. Isto justifica a necessidade das aulas práticas no ensino de Física, para que ocorra uma validação do conteúdo teórico, uma associação da Física com o dia-a-dia do aluno de forma prazerosa, coerente e atual.

Agora que entendemos o quão importante é o curso de Física Experimental, precisamos conhecer os conceitos usados nesse universo, e a primeira coisa é sabermos quantificar e qualificar aquilo que observamos. Sendo assim, para uma eficiente prática laboratorial faz-se necessário medir e saber expressar os resultados de maneira clara e padronizada, para que possam ser facilmente interpretados por outros experimentadores. Com esse intuito, foi criado o Sistema Internacional de unidades (SI). Nele, os resultados obtidos através de medidas são expressos pelo valor da grandeza observada seguido de sua incerteza, que é determinada de acordo com o procedimento experimental.

Exemplo 1: Ao medir o comprimento da bancada do laboratório de física, foi encontrado o valor (3,25±0.02)m, onde 3,25 correspondem ao valor medido em metros e 0,02 corresponde a incerteza associada a essa medida, também medida em metros. Esta incerteza associada indica o quanto o valor medido pode diferir do valor verdadeiro da medida da bancada~~, em termos de probabilidades~~.

1.2 Medida

Uma medida é uma grandeza obtida como comparação de um valor adotado como padrão dessa grandeza e um valor desconhecido dela. O resultado de uma medida (M) é representado por um número (m), uma unidade de medida (u) e a indicação da confiabilidade da medida, representada pelo erro provável da medida (Δm).

$$M = (m \pm \triangle m)$$

Uma medida pode ser realizada de forma direta ou indireta.

- Direta: quando o valor padrão é comparado diretamente com o valor desconhecido da grandeza (ex: medir o comprimento de um lápis comparando-o com uma régua (valor padrão).
- Indireta: é necessário utilizar padrões de grandezas que se relacionam com a grandeza a ser medida (ex: a variação da temperatura em um termômetro de mercúrio é obtida através da variação do comprimento da coluna de mercúrio, que é causada pela variação da temperatura).

UNIVERSIDADE FEDERAL DO ESPÍRITO SANTO
DOCETE OMNES GENTES

1.3 ERRO E INCERTEZA

1.3.1 Tipos de Erros

É importante chamar a sua atenção para a diferenciação de 2 conceitos bastante importantes na Teoria dos Erros, que são os termos "Erro" e "incerteza", eles não devem ser confundidos, nem interpretados de forma sinônima.

Uma medição não é perfeita, ou seja, a sofisticação ou precisão dos aparelhos de medida não impede que erros sejam cometidos na realização da medida, resultando, assim, em erros no seu resultado final.

Determinar o erro cometido não é uma tarefa simples, pois durante o processo de medição inúmeros fatores podem influenciar o seu resultado. Portanto, é possível somente fazer uma estimativa do erro.

Os erros podem ser classificados como ***Erro Sistemático***; ***Erro Aleatório*** e ***Erro de Escala***.

- ***Erro Sistemático*** (E_{Sis}): é a diferença entre o resultado y da medição e o valor verdadeiro y_v (erro sistemático = y - y_v). Este erro sistemático é o mesmo para qualquer resultado, quando a medição é repetida. No entanto, mesmo não variando durante a medição, afeta cada resultado de medida obtido, fazendo com que seu valor se afaste do valor verdadeiro. Assim, o efeito de um erro sistemático não pode ser avaliado simplesmente repetindo as medições. Os erros sistemáticos prejudicam a exatidão da medida.

- ***Erro Aleatório*** (E_{Ale}) (ou estatístico): erro que resulta de variações aleatórias no resultado da medição, devido a fatores que não podem ser controlados ou que, por qualquer motivo, não são controlados, esse tipo de erro afeta a precisão de uma medida. Os erros estatísticos podem ser reduzidos, eliminando-se ou reduzindo-se os fatores aleatórios que interferem no processo de medição. Geralmente a redução destes fatores não é possível, com isso a solução para reduzir os erros estatísticos consiste em repetir muitas vezes a medição.

- ***Erro de Escala*** (E_{Esc}): é o erro cometido pelo operador, devido ao limite de resolução da escala do instrumento de medida.

A seguir é apresentado um modelo ilustrativo das diferenças entre os erros sistemático e aleatório. Na figura 1, temos 4 alvos e pontos que representam a posição do impacto. O centro

de cada alvo representa o valor verdadeiro da medida e os pontos de impacto os resultados das medições.

Na figura (a) os resultados são exatos porque estão próximos do valor verdadeiro (centro do alvo), mas não são precisos porque há dispersão. Portanto, os impactos estão distribuídos ao acaso ao redor do centro do alvo, o que representa um erro aleatório. Na figura (b) está representada a situação ideal, em que os pontos de impacto estão no centro do alvo (valor verdadeiro). Os resultados são precisos e exatos. Na figura (c) os pontos de impacto estão distribuídos ao acaso ao redor do centro do alvo (valor verdadeiro), o que representa um erro aleatório. A diferença entre (a) e (c) é que em (c) os pontos de impacto estão distantes do centro do alvo. Nesse caso, o pior caso, os resultados não são nem exatos e nem precisos. Por fim, em (d) todos os pontos estão concentrados em uma região distante do centro do alvo (valor verdadeiro). Os resultados são precisos porque estão próximos entre si, mas não são exatos porque estão distantes do valor verdadeiro (centro do alvo). Como o desvio atuou na mesma direção em todos os disparos, isso caracteriza um erro sistemático.

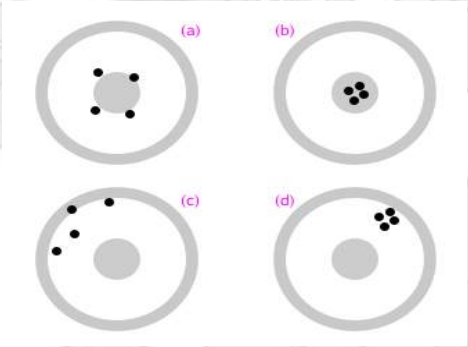


Figura – Modelo de ilustração de tipos de erro em medidas.

O *erro máximo* na medida ou desvio da medida (Δx) é a soma de todos os erros:

$$E = \Delta x = E_{Sis} + E_{Ale} + E_{Esc}$$

No entanto, em várias situações um ou dois erros predominam sobre o outro.

1.3.2 Calculo do erro aleatório provável

Uma vez conhecidos, os erros sistemáticos podem ser compensados ou eliminados. No entanto, isso não é possível para o caso dos erros aleatórios. Por isso, sua análise é feita utilizando-se tratamento estatístico, que embora não permita determinar seu valor verdadeiro, possibilita estimar o seu valor provável.

Antes de calcular o erro aleatório, precisamos definir alguns conceitos e relações.

1. *Valor mais provável de uma grandeza*: é a média aritmética das diversas medidas da grandeza $(\bar{x})$.

$$\bar{x} = \frac{(x_1 + x_2 + x_3 + \cdots + x_n)}{n}$$

, ou seja,

$$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$$

2. *Desvio da média (Δx_i)*: diferença entre o valor de uma medida individual da grandeza e seu valor mais provável .

$$\Delta x_i = x_i - \bar{x}$$

3. *Desvio padrão* (σ) : indica a tendência das medidas de se distribuírem em torno do seu valor mais provável.

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum(\Delta x_i)^2}{n-1}}$$

4. *Desvio padrão da média* (σ_m): indica a tendência de um conjunto de M médias se distribuir em torno do seu valor médio.

$$\sigma_m = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

A partir das definições e relações anteriores, o erro aleatório pode ser estimado pela equação:

$$\cancel{E_{Ale} = \pm t\,\sigma_m}$$

~~t = coeficiente t de Student que, por simplicidade, será assumido como sendo igual a 1. Nesse caso, o erro aleatório provável será igual ao desvio padrão da média.~~

$$E_{Ale} = \pm\sigma_m$$

1.3.3 Erro de escala

O erro de escala está presente em toda medida, pois está relacionado à escala do instrumento utilizado na medição.

Quando fazemos uma medida individual não tem sentido levar em conta erro aleatório e o erro sistemático pode ser eliminado, caso sua origem seja conhecida. Portanto, cada medida individual deverá ser apresentada como:

$$M = (m \pm \Delta m)u$$

em que Δm é o erro de escala.

De acordo com sua escala, os instrumentos de medida podem ser classificados em:

- Instrumentos analógicos: suas escalas permitem que o algarismo duvidoso (último algarismo) seja ***avaliado***.

- Instrumentos não analógicos: suas escalas não permitem que o algarismo duvidoso (último algarismo) seja ***avaliado***. O algarismo duvidoso é lido e não avaliado.

1.3.4 Erro de escala em instrumentos

Quando o instrumento apresentar em seu manual de operação informações acerca do erro de escala, essa informação deve ser utilizada. Quando essa informação não existir, devemos seguir os seguinte procedimento:

Analógicos: Nos instrumentos analógicos o erro de escala (E_{Esc}) é determinado por:

$$E_{Esc} = \pm\frac{\text{Menor divisão da Escala}}{2} = \pm\frac{MDE}{2} \quad ,$$

MDE, também é chamado de precisão da escala ou ainda de resolução da escala.

Lembrete: qualquer erro, com exceção do erro percentual deve ser representado apenas com um algarismo significativo.

Não analógicos: Como as escalas de instrumentos não analógicos não permitem a avaliação do algarismo duvidoso, o erro de escala é determinado através da equação:

$$E_{Esc} = \pm MDE$$

1.3.5 Erro relativo percentual

Para avaliar o resultado de uma medida de uma grandeza podemos, ainda, comparar esse resultado com o seu valor de referência preestabelecido, que pode ser um valor tabelado ou a média de um conjunto de medidas da grandeza. Isso possibilita determinar o *erro relativo percentual*, dado por:

$$E\% = \left|\frac{x - \bar{x}}{\bar{x}}\right| \times 100\%$$

em que é o valor medido e é o valor de referência.

Note que diferente de outros erros esse é um erro ADIMENSIONAL e o símbolo de % deve estar presente.

Exemplo 2: Na determinação da massa específica da prata, encontrou-se $\mu = 9{,}90$ g/cm^3. Sabe-se que a massa específica da prata é $\mu = 9{,}91$ g/cm^3. Determine o erro relativo percentual da medida.

1.4 Propagação de erros

1.4.1 Propagação de erros básica

O estudo da propagação de erros é o estudo da influência dos erros individuais no resultado das operações matemáticas que fornecem o valor de uma grandeza que é medida indiretamente.

Supondo que y seja uma grandeza dependente de outras grandezas, $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$, pode-se escrever:

$$y = f(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n)$$

A variação de y, em função das variações infinitesimais de cada um dos x_i será dada pela diferencial exata de y :

$$dy = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right) dx_1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x_2}\right) dx_2 + \cdots + \left(\frac{\partial f}{\partial x_n}\right) dx_n \quad ,$$

onde $\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)$são as derivadas parciais da função f em relação a cada uma das variáveis independentes.

Podemos determinar os erros das variáveis de forma análoga às variações infinitesimais apresentadas, pois ambos representam variações. Nesse caso tem-se:

$$\Delta y = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right) \Delta x_1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x_2}\right) \Delta x_2 + \cdots + \left(\frac{\partial f}{\partial x_n}\right) \Delta x_n \quad .$$

Para se determinar o máximo de erro na medida considera-se que todos os erros atuam no mesmo sentido, somando-se. Portanto, a equação anterior deve ser reescrita tomando-se o módulo das derivadas parciais na equação.

$$\Delta y = \left|\frac{\partial f}{\partial x_1}\right| \Delta x_1 + \left|\frac{\partial f}{\partial x_2}\right| \Delta x_2 + \cdots + \left|\frac{\partial f}{\partial x_n}\right| \Delta x_n \quad .$$

1.4.2 Erro propagado nas operações básicas

A seguir são apresentadas as equações do erro propagado para as operações mais utilizadas.

Adição:

$$(x \pm \Delta x) + (y \pm \Delta y) = (x + y) \pm (\Delta x + \Delta y)$$

Subtração:

$$(x \pm \Delta x) - (y \pm \Delta y) = (x - y) \pm (\Delta x + \Delta y)$$

, perceba que a incerteza para subtração também é somada.

Multiplicação:

$$(x \pm \Delta x) \times (y \pm \Delta y) = x\ y \pm (|y|dx + |x|dy) = \left(x\ y \pm x\ y \left(|\frac{dx}{x}| + |\frac{dy}{y}| \right) \right)$$

Potenciação:

$$(x \pm \Delta x)^n = x^n \pm |n\ x^{n-1}|dx = \left(x^n \pm x^n |n\ \frac{dx}{x}| \right)$$

Divisão: $(x \pm \Delta x) \div (y \pm \Delta y) = (x \pm \Delta x) \times (y \pm \Delta y)^{-1}$, portanto usando as regras de multiplicação e potencia temos, $(x \pm \Delta x) \div (y \pm \Delta y) = x\ y^{-1} \pm (|y^{-1}|dx + |x\ (-1)y^{-2}|dy)$, que rearrumando tudo, ficamos com:

$$(x \pm \Delta x) \div (y \pm \Delta y) = \left(\frac{x}{y} \pm \frac{x}{y} \left(|\frac{\Delta x}{x}| + |\frac{\Delta y}{y}| \right) \right)$$

Logaritmação natural:

$$ln(x \pm \Delta x) = ln(x) \pm \left| \frac{1}{x} \right| \Delta x$$

Logaritmação decimal:

$$log(x \pm \Delta x) = log(x) \pm \left| \frac{log(e)}{x} \right| \Delta x \quad ,$$

faça como exercício a demonstração dessa equação, para tanto use propriedades de logaritmos e a equação de propagação do logaritmo natural.

Exponencial:

$$e^{x \pm \Delta x} = e^x \pm e^x \Delta x$$

, observe que o módulo é desnecessário, pois e^x é sempre positiva para qualquer x real.

1.4.3 Exercícios

Dado as seguintes medidas:

$A = (2,10 \pm 0.05)m$ $B = (1,19 \pm 0.03)m$ $C = (1,5 \pm 0.3) \times 10min$

1. Calcule $A + B$, $A - B$, $A * B$.
2. Calcule e interprete o resultado de $\frac{A}{C}$
3. Se uma dada medida de ângulo é $\Theta = (\theta \pm \Delta\theta)rad$, qual o valor $Sen(X) = Sen(\theta \pm \Delta\theta)$?
4. Se uma dada medida é $X = (x \pm \Delta x)$, qual o valor de $p^X = (p^{x \pm \Delta x})$?
5. Questão desafio, se tivermos duas medidas $X = (x \pm \Delta x)$ e $Y = (y \pm \Delta y)$, qual o valor de Y^X?

UNIVERSIDADE FEDERAL DO ESPIRITO SANTO
DOCETE OMNES GENTES

1.5 ALGARISMOS SIGNIFICATIVOS

1.5.1 Noções gerais sobre algarismos significativos

Ao realizarmos um experimento no laboratório, obtemos os resultados de certa grandeza. Na hora de expressarmos os resultados, uma pergunta muito freqüente que fazemos é: "Com quantos algarismos significativos devo expressar esse resultado?". "Os algarismos significativos são algarismos que possuem algum significado quando escritos na forma decimal". Porém, ao determinarmos a quantidade de algarismos significativos, devemos seguir regras, como:

- **Zeros à esquerda** do primeiro algarismo diferente de zero **não são significativos**, logo, o único significado desse "conjunto de zeros" é indicar a quantidade de casas decimais no resultado através da posição da vírgula.
- Como toda grandeza experimental tem uma incerteza a ela associada, devemos ter em mente de que todos os algarismos à direita, a partir de um certo algarismo X são não significativos, pois em termos de probabilidades, todos os algarismos, inclusive o primeiro, possuem uma incerteza a ele associados, assim, quando a probabilidade de um algarismo ser o correto é a mesma que qualquer algarismo de 0 a 9, dizemos que ele não é mais significativo, sendo incorreto escrevê-lo no resultado. Assim, o último algarismo com maior probabilidade de ocorrer entre os demais é chamado *algarismo significativo duvidoso*. É sobre ele que em geral incide nossa incerteza.
- Se a incerteza é expressa com apenas um algarismo, o algarismo correspondente na grandeza é o último algarismo significativo, mas, se a incerteza é expressa com 2 algarismos, os 2 algarismos correspondentes na grandeza podem ser considerados como os 2 últimos algarismos significativos. A maneira de se representar um número e a sua incerteza deve ser padronizado pelo número de casas decimais:

$$(2450 \pm 6)\ \text{kg}$$

$$(2{,}57 \pm 0{,}04)\ \text{m}$$

$$(3{,}000 \pm 0{,}004)\ \text{L}$$

$$(0{,}075 \pm 0{,}002)\ \text{ton}$$

$$(0{,}254 \pm 0{,}005)\ \text{km}$$

1.5.2 Exemplos

A partir de uma experiência, um aluno mediu os seguintes valores médios e desvios médios de uma grandeza:

I m = (24,5478±0,0432)g $\rightarrow$ (24,55±0,04)g

II ~~m = (8728,7±13,6)g $\rightarrow$ (873±1)g~~ m = (8728,7±13,6)g $\rightarrow$ (873±1)×10g

Deve-se notar que é bastante inconveniente usar unidades ou fatores multiplicativos diferentes para a grandeza e para a incerteza.

1.5.3 Exercício:

Figura 1.5.3 - Medindo o tamanho de um besouro.

Uma vez decidido o que caracteriza o tamanho do besouro, qual das alternativas abaixo melhor caracteriza a medida do tamanho do besouro?

a) Entre 0 e 1 cm

b) Entre 1 e 2 cm

c) Entre 1,5 e 1,6 cm

d) Entre 1,54 e 1,56 cm

e) Entre 1,546 e 1,547 cm

Acertou aquele que optou pela alternativa d. Isso porque, na leitura de uma escala, o algarismo significativo mais à direita de um número deve sempre ser o duvidoso (não esqueça:

o algarismo duvidoso é significativo!). Resumindo: Qualquer medida por comparação entre um objeto e uma escala deve incluir além dos dígitos exatos (1,5 nesse caso) uma estimativa do dígito (duvidoso). Uma vez que a régua foi marcada em milímetros você deve estimar o comprimento fracionário (em décimos de mm) que melhor expressa a medida. Você pode não precisar se vale 1,54, 1,55 ou mesmo 1,56. Essa é a expressão da sua incerteza.

UNIVERSIDADE FEDERAL DO ESPÍRITO SANTO
DOCETE OMNES GENTES

1.6 ARREDONDAMENTOS

Frequentemente ocorre que números devem ser arredondados epara isso é preciso seguir algumas regras, baseadas no algarismo duvidoso X:

Se o algarismo à direita de X for menor ou igual a 5,0, os algarismos excedentes devem ser eliminados (arredondamento para baixo). Exemplo: Neste caso o algarismo X é o 4.

$$2{,}4\mathbf{3} \rightarrow 2{,}4$$

$$2{,}450 \rightarrow 2{,}4$$

Se os algarismos à direita de X maior ou igual a 5,1, os algarismos excedentes são eliminados e ao algarismo X soma-se 1 (arredondamento para cima). Exemplo:

$$2{,}48\mathbf{7} \rightarrow 2{,}49$$

$$2{,}46 \rightarrow 2{,}5$$

$$2{,}451 \rightarrow 2{,}5$$

CUIDADO !!

Quando realizamos uma medida em certa unidade, por exemplo, 54cm, devemos ter cuidado ao escrevermos este número de outra maneira, pois podemos aumentar a quantidade de algarismos significativos a ele associado.Assim, o que seria, no nosso caso, o algarismo 4 duvidoso, talvez outro algarismos assuma esse lugar. Exemplos:

- 54cm = 5,4 x 10^{-1}m = 0,54m
- 54cm = 54 x 10^{1}mm, seria errado escrever 54cm = 540mm, pois aqui você diz que o 4 é certo e o duvidoso é o zero.
- 54cm = 5,4 x 10^{-4}km = 0,00054km, nesse caso está correto escrever assim pois os zeros a esquerda não são significativos.

1.7 EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO

1. Determinar a incerteza desvio avaliado nos seguintes equipamentos de medida:

   a) Régua milimetrada:

   b) Régua com escala graduada em centímetros:

   c) Balança mecânica, em gramas, sem manual:

   d) Cronômetro digital com precisão de 0,2 s:

   e) Amperímetro digital, sem manual, com escala graduada em 0, 2, 4, 6, 8, 10 ampères (A):

   f) Dinamômetro com escala graduada de 5 em 5 newtons (N);

   g) Voltímetro analógico, com fundo de escala de 10 volts dividida em 20 partes:

2. Dadas as medidas e seus respectivos desvios, escrever os resultados corretamente, em termos de algarismos significativos.

	(a)	(b)	(c)	(d)	(e)
M	32,75 g	72,19 cm	4,189 g	12314 m	82372 h
Δm	0,25 g	2,3 cm	0,0219 g	276 m	28 h

3. Numa experiência, a medida do comprimento de uma barra, repetida 5 vezes (N = 5), forneceu a tabela:

N	1	2	3	4	5
L_n(m)	2,21	2,26	2,24	2,22	2,27

   a) Encontrar o valor médio:

   b) Encontrar o desvio médio:

   c) Escrever o resultado final em termos de algarismos significativos:

4. Efetuar as seguintes operações:

   a) $(231,03 \pm 0,02) - (12,8 \pm 0,5) \ =$

   b) $\frac{(2{,}14 \pm 0{,}03)\ kg}{(1{,}4 \pm 0{,}1)\ m^3} \ =$

   c) $(1,48 \pm 0,03)(1 - e^{\frac{2{,}0 \pm 0{,}5}{5{,}19 \pm 0{,}08}})V \ =$

1.8 CONSTRUÇÃO DE GRÁFICOS

Ao construirmos um gráfico, podemos ter uma melhor visualização dos valores encontrados e as relações existentes entre eles, avaliando como uma grandeza varia em função de outra. Para que um gráfico apresente todas as informações que desejamos, ele deve ser construído de maneira correta, devendo conter:

- Títulos, eixos, escalas, unidades e barras de incertezas;
- Deve-se escolher a área do papel com o tamanho adequado;
- Prefira a relação de aspecto (altura/largura) menor que 1;
- Coloque a variável dependente no eixo Y e a independente em X;
- Marque nos eixos os nomes das variáveis e suas unidades em parênteses;
- Marque os pontos com figuras claras;
- Marque as barras de incertezas em cada ponto. Se a incerteza for muito pequena para aparecer na escala, faça menção de tal fato na legenda da figura: "as barras de incerteza são muito pequenas para aparecer na figura";
- Faça legendas e numere as figuras.

UNIVERSIDADE FEDERAL DO ESPÍRITO SANTO
DOCETE OMNES GENTES

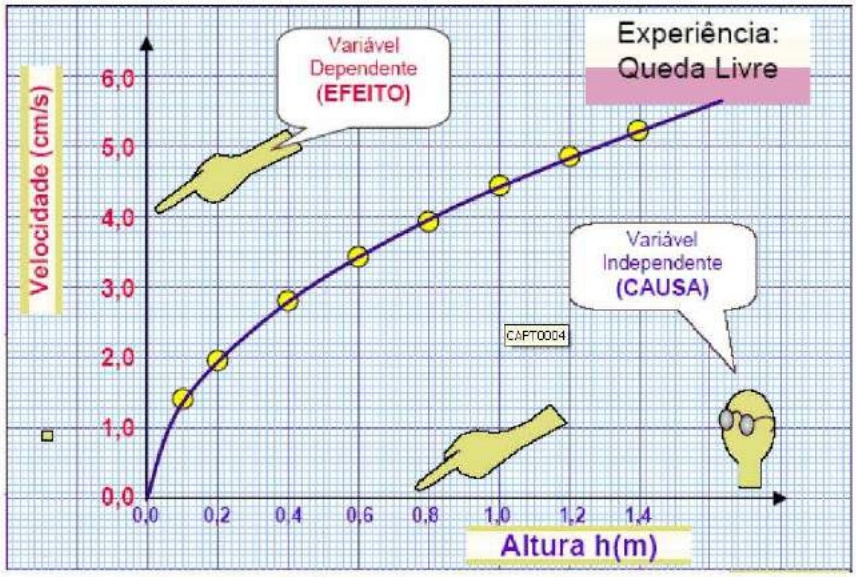


Figura 5 – Posicionamento das variáveis dependentes e independentes em um gráfico.

1.8.1 CÁLCULO PARA MELHOR ESCALA

Cálculo e interpretação das escalas

Considere os dados a seguir da velocidade de um corpo em função do tempo: **Tabela 1:**

Medidas	Tempo (s)	Velocidade (m/s)
1	8,0	0,8
2	13,0	1,3
3	16,0	2,3
4	20,0	3,2
5	25,0	4,3
6	30,0	4,7

Velocidade de um corpo em função do tempo.

Ao esboçar um gráfico para a tabela 1 corremos o risco de existir dados muito próximos dos eixos X e Y em que suas incertezas atinjam valores abaixo destes, ou dados que dependendo da escala adotada ficariam muito próximo dos extremos do gráfico (limite do papel), o que não seria bom visivelmente e acarretaria problemas na hora de traçar retas como: média e auxiliares que

são fundamentais para ver a precisão dos dados e identificação do coeficiente angular, linear, bem como suas incertezas.

Para evitar alguns desses problemas, ao esboçar o gráfico, não usaremos os limites do papel milimetrado (180 X 280 mm), traçaremos novas retas X e Y 10 mm acima dos limites do papel. Para que os dados fiquem ajustados dentro dos novos limites, vamos retirar 10% do menor valor e acrescentarmos 10% ao maior valor tabelado; para isto basta multiplicar por 0,9 e 1,1 do menor e maior valor respectivamente. Assim teremos os valores mínimos e máximos exigidos pelo papel. Portanto, a nova divisão do papel será 170 x 270 mm, e devido ao acréscimo e desconto de 10% dos dados teremos que fazer novos cálculos para achar a melhor escala e identificação dos pontos do gráfico.

- Para a variável tempo: Menor valor tabelado: 8,0 (s) → 8,0 (s) x 0,9 = 7,2 (s)(mínimo). Maior valor tabelado: 30,0 (s) → 30,0 (s) x 1,1 = 33,0 (s) (máximo).

$$E_1 = \frac{Max - Min}{170mm} \qquad E_2 = \frac{Max - Min}{270mm}$$

$$E_{T1} = \frac{33,0 - 7,2}{170mm} = 0,15176\frac{s}{mm} \qquad E_{T2} = \frac{33,0 - 7,2}{270mm} = 0,09555\frac{s}{mm}$$

- Para a variável velocidade: Menor valor tabelado: 0,8 (m/s) → 0,8 (m/s) x 0,9 = 0,72 (m/s) (mínimo). Maior valor tabelado: 4,7 (m/s) → 4,7 (m/s) x 1,1 = 5,17 (m/s) (máximo)

$$E_1 = \frac{Max - Min}{170mm} \qquad E_2 = \frac{Max - Min}{270mm}$$

$$E_{V1} = \frac{5,17 - 0,72}{170mm} = 0,02617\frac{m/s}{mm} \qquad E_{V2} = \frac{5,17 - 0,72}{270mm} = 0,01648\frac{m/s}{mm}$$

- Arredondaremos os valores sempre para cima para não corrermos o risco de o valor tabelado coincidir fora do gráfico; assim:

$E_{T1} = 0,2\frac{s}{mm}$
$E_{T2} = 0,1\frac{s}{mm}$
$E_{V1} = 0,03\frac{m/s}{mm}$
$E_{V2} = 0,02\frac{m/s}{mm}$

Escolha da Melhor Escala

As escalas adotadas serão as que forem "menos arredondadas"; para que os dados no gráfico fiquem melhor visivelmente.
Quando escolhermos uma escala para T no lado com as dimensões 170 mm ou 270 mm, automaticamente o V ficará com a escala do lado oposto.

- $E_{T1} = \frac{(33,0-7,2)(s)}{170mm} = 0,1517647 \approx 0,2\frac{s}{mm}$
- $E_{T2} = \frac{(33,0-7,2)(s)}{270mm} = 0,09555 \approx 0,1\frac{s}{mm}$
- $E_{V1} = \frac{5,17-0,72}{170mm} = 0,02617\frac{m/s}{mm} \approx 0,03\frac{m/s}{mm}$
- $E_{V2} = \frac{5,17-0,72}{270mm} = 0,01648\frac{m/s}{mm} \approx 0,02\frac{m/s}{mm}$

A melhor escala para T foi E_{T2} ("menos arredondada"), e como E_{T2} foi dividida por 270 mm, então obrigatoriamente só restou escolher E_{V1}, que foi dividida por 170 mm.

Portanto, as escalas adotadas são:

$E_{T2} = 0,1\frac{s}{mm} \rightarrow$ eixo de 270 mm

$E_{V1} = 0,03\frac{m/s}{mm} \rightarrow$ eixo de 170 mm

Desta forma estão definidas as melhores escalas para as variáveis nas dimensões adequadas a elas.

1.8.2 Origem

Devido às novas retas X e Y traçadas 10 mm acima dos limites do papel, não poderemos usar a origem do papel, logo as novas origens para cada eixo serão os valores mínimos calculados no item 1.8.1, vamos relembrar:

- Para a variável tempo:

  Menor valor tabelado: 8,0 (s) →8,0 x 0,9 = 7,2 (s) (mínimo)

  Origem em T: 7,2 (s) (eixo de 270 mm)

- Para a variável velocidade:

  Menor valor tabelado: 0,8 (m/s)→ 0,8 x 0,9 = 0,72 (m/s) (mínimo)

  Origem em V: 0,72 (m/s) (eixo de 170 mm)

1.8.3 Identificação dos pontos

Com as escalas adotadas, os pontos no papel milimetrado serão encontrados da seguinte forma:

1. $\frac{(Valor\ T_i - Origem\ em\ T)}{Escala\ T} = A$ mm a ser andado no eixo de 270 mm. Como cada quadradinho do papel milimetrado possui 1 mm, teremos de andar A quadradinhos para localizar a coordenada do ponto i. Note que A no fim das contas poderá ser arrendondado, pois ele tem de ser um número NATURAL.

2. $\frac{(Valor\ V_i - Origem\ em\ V)}{Escala\ V} = B$ mm a ser andado no eixo de 170 mm.

   Desta forma obtemos os pontos P_1 (X;Y) , P_2 (X;Y), ..., P_n (X;Y).

   Temos:

- Escala em $T = 0,1\frac{s}{mm}$ → eixo de 270 mm
- Escala em $V = 0,03\frac{m/s}{mm}$ → eixo de 170 mm
- Origem em $T : 7,2(s)$(eixo de 270 mm)
- Origem em $V : 0,72(m/s)$ (eixo de 170 mm)
- $P_1(X;Y) =$
  $\rightarrow\ \frac{8,0(s)-7,2(s)}{0,1\frac{s}{mm}} = 8,0 = 8mm$
  $\rightarrow\ \frac{0,8(m/s)-0,72(m/s)}{0,03\frac{m/s}{mm}} = 2,66 \simeq 3mm$, note que aqui foi necessário arredondamento;

- $P_1(X;Y) = (8;3)$

- $P_2(X;Y) =$
  $\rightarrow \frac{13{,}0(s)-7{,}2(s)}{0{,}1\frac{s}{mm}} = 58,0 = 58mm$
  $\rightarrow \frac{1{,}3(m/s)-0{,}72(m/s)}{0{,}03\frac{m/s}{mm}} = 19,33 \simeq 19mm$

- $P_2(X;Y) = (58;19)$

- E assim por diante.

UNIVERSIDADE FEDERAL DO ESPÍRITO SANTO
DOCETE OMNES GENTES

1.9 Interpolação de Tabelas

Ao consultar uma tabela, dessas publicadas em livros especializados é muito difícil encontrar exatamente o valor procurado. Se por exemplo estivermos procurando o índice de refração de um determinado material em função da temperatura, pode ocorrer que a temperatura desejada esteja entre dois valores tabelados. A solução é interpolar a tabela. Existem vários métodos de interpolação de dados em tabelas: podemos usar polinômios, funções logarítmicas, exponenciais, etc. Esses métodos podem ser encontrados em qualquer livro básico de métodos numéricos.

Acontece que muitas dessas tabelas são compiladas de forma que uma simples interpolação linear seja suficientemente precisa, ou seja, o erro da interpolação linear é menor que a incerteza dos valores tabelados. Veja o exemplo a baixo:

1.9.1 EXEMPLO

Temperatura (°C)	Pressão (Torr)
60	149,4
80	355,1
100	760
120	1489

Tabela 1. Pressão de vapor da água líquida.

Para determinar a pressão de vapor a 90°C pode-se interpolar linearmente a tabela entre os valores de 80 e 100°C. A interpolação linear pode ser entendida como o ajuste de uma reta a DOIS pontos da tabela e a determinação de um valor intermediário não tabelado. A figura 6 exemplifica o procedimento graficamente.

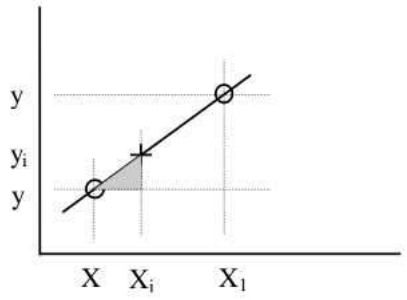


Figura 7 – Representação gráfica de uma interpolação linear.

Sejam os pontos (x_0, y_0) e (x_1, y_1) dois pontos quaisquer consecutivos na tabela. Ajustando-

lhes uma reta, pode-se escrever, para um ponto (x_i, y_i) intermediário.

$$\frac{y_i - y_0}{x_i - x_0} = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} \quad .$$

Isolando y_i temos:

$$y_i = y_0 + (x_i - x_0)\frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} \quad ,$$

que aplicada ao exemplo resulta:

$$y_{90} = 355 + (90 - 80)\frac{760 - 355}{100 - 80} \quad ,$$

que fornece o valor procurado: P(90°C) = 558 Torr.

UNIVERSIDADE FEDERAL DO ESPÍRITO SANTO
DOCETE OMNES GENTES

1.10 Ajuste pelo método dos mínimos quadrados

A idéia básica no processo de ajuste de uma função, a partir de um conjunto de dados experimentais $\{(x_1,y_1), (x_2,y_2),..., (x_n,y_n)\}$, é de se obter a curva que melhor represente o conjunto de pontos.

Para isto é necessário minimizar as distâncias de cada ponto à curva, determinando os valores dos parâmetros a e b que minimizam os desvios com relação à função linear y = ax + b.

A soma dos desvios quadráticos é uma função denominada x^2 dada abaixo:

$$x^2 = \sum_{i=1}^{N} (y_i - \bar{y})^2 \quad ,$$

onde x_i e y_i são valores conhecidos.

A função x^2 tem um mínimo para (valor mais provável da função). Assim as derivadas parciais de x^2 (a,b) com relação a cada parâmetro a e b devem ser iguais a zero.

$$\frac{\partial x^2}{\partial a} = \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial}{\partial a} \left(a + bx_i - y_i\right)^2 = 0$$

e

$$\frac{\partial x^2}{\partial b} = \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial}{\partial b} \left(a + bx_i - y_i\right)^2 = 0$$

Através da solução de um sistema de duas equações, determinamos os valores de a e b:

$$a = \frac{1}{\triangle} \left(\sum y_i \sum x_i^2 - \sum y_i x_i \sum x_i \right) \quad ,$$

$$b = \frac{1}{\triangle} \left(N \sum y_i x_i - \sum x_i \sum y_i \right) \quad ,$$

onde

$$\triangle = \left(N \sum x^2 - \left(\sum x \right)^2 \right) \quad .$$

Este é o ajuste de funções simples. No entanto, na maioria dos casos, o tratamento matemático é complicado e métodos computacionais são necessários para obter este ajuste.

1.10.1 Exemplo: Queda livre e aceleração da gravidade

Para determinar a aceleração da gravidade usamos os dados de um corpo em queda livre. Inicialmente preparamos uma tabela com os tempos e espaços e construímos o gráfico a seguir:

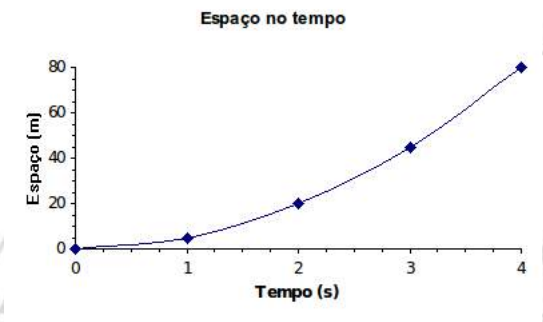
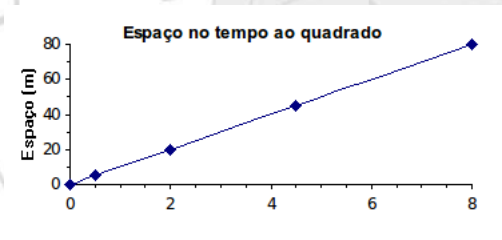


Figura 8 – Espaços em função do tempo para um corpo em queda livre.

Neste tipo de gráfico, onde $x(t) = x_0 + v_0\ t + \frac{a}{2}t^2$, não é imediato determinar a aceleração do corpo. Mesmo tendo $v_0 = 0$ e $x_0 = 0$ (com o eixo horizontal no sentido da aceleração) a expressão se converte em: , que ainda é uma função não linear em t.

Se, ao invés de representarmos "x vs t", criarmos uma nova variável $t^* = \frac{t^2}{2}$ e representarmos "x vs t^*" teremos uma reta: $x = at^*$, onde a é o coeficiente angular da reta, conforme pode ser visto na figura **??**. Esse coeficiente angular por sinal é a aceleração do movimento.



1.10.2 Exemplo: Movimento Retilíneo Uniforme (MRU)

Os seguintes dados de deslocamento em função do tempo foram obtidos através de um experimento, de movimento retilíneo uniforme. A partir da tabela construa o gráfico referente a mesma, a seguir confira os cálculos para o ajuste linear e monte o gráfica da tabela com os dados ajustados. Tabela 1 - Espaço X Tempo

Sabendo que a velocidade e o deslocamento relacionam-se de forma linear através da equação

X=t(s)	1,0	2,0	3,0	4,0
Y=y(m)	0,9	1,8	3,2	4,1

$x(t) = x_0 + v\ t$, é possível obter uma melhor reta a este conjunto de dados através do método dos mínimos quadrados.

Como foram 4 conjuntos de dados coletados, adotamos n=4, logo:

$$\begin{aligned}
\left(\sum_{i=1}^{n} t_i\right)^2 &= 100\ s^2 \quad , \\
\sum_{i=1}^{n} y_i &= 10\ m \quad , \\
\sum_{i=1}^{n} t_i &= 10\ s \quad , \\
\sum_{i=1}^{n} t_i^2 &= 30\ s^2 \quad , \\
\sum_{i=1}^{n} y_i\ t_i &= 30,5\ \frac{m}{s} \quad .
\end{aligned}$$

Assim, é fácil calcular os valores de b, a e Δ, respectivamente, -0,25; 1,1 e 20.

Para a reta y = ax + b, temos:

$$\begin{aligned}
y_1 &= 1,1 * 1 - 0,25 = 0,85 \quad , \\
y_2 &= 1,1 * 2 - 0,25 = 1,95 \quad , \\
y_3 &= 1,1 * 3 - 0,25 = 3,05 \quad , \\
y_4 &= 1,1 * 4 - 0,25 = 4,15 \quad .
\end{aligned}$$

Logo, os valores para a reta ajustada são:

T(s)	**1**	**2**	**3**	**4**
Y(m)	**0,85**	**1,95**	**3,05**	**4,15**

1.11 Representação de Incertezas em Gráficos – Barra de Erros

Em um gráfico vamos expressar a incerteza de cada ponto experimental na forma de uma barra vertical (ou horizontal) que representará o intervalo de confiança definido pela incerteza da grandeza.

1.11.1 Exemplo introdutório:

Vamos representar os dados da tabela 2 em um gráfico. É comum incluir numa tabela de dados uma coluna com um número de ordem. Isso permite, por exemplo, numa discussão, comentar a medida 3, ao invés da medida cujo espaço é 11,10.

N	(s ± 0,05) (m)	v (m/s)
1	4,60	1,84±0,55
2	6,90	2,76±0,82
3	11,10	3,99±1,20
4	20,60	9,88±2,96

Tabela 2. Espaços e velocidades de um corpo.

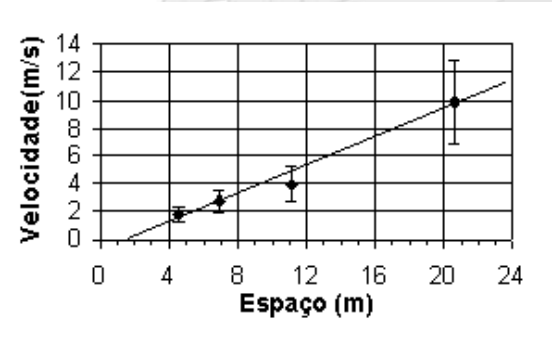


Figura 11 – Velocidades e posições de um corpo.

No gráfico da figura 11, a incerteza do espaço não foi colocada, pois é menor que o ponto marcado. Neste gráfico também foi ajustada uma reta média que representa os pontos experimentais. A reta média pode ser traçada à mão, observando algumas regras simples: Procure passar a reta equilibradamente pelo maior número de pontos; A origem (0;0) pode ou não ser um ponto experimental; Se for fisicamente justificável, trate-a como qualquer outro ponto experimental (inclusive com incerteza), caso contrário trace a melhor reta ignorando a origem.

1.11.2 Reta média

É a reta mais provável que passa o mais perto possível de todos os dados; deve ser traçada usando uma régua transparente; e não passa necessariamente sobre os pontos marcados no papel, nem mesmo sobre os pontos "inicial" e "final".

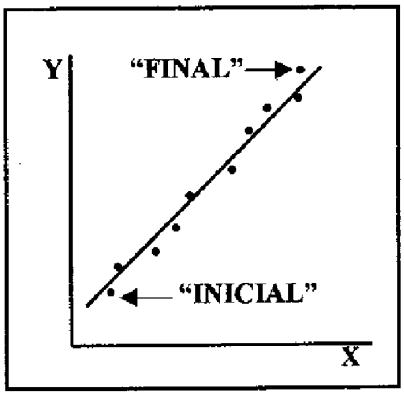


Figura 11 :Reta Média

1.11.3 Coeficiente angular da reta média

Para avaliar o coeficiente angular da reta média escolha dois pontos sobre a reta conforme os pontos **P** e **Q** na Figura 12.

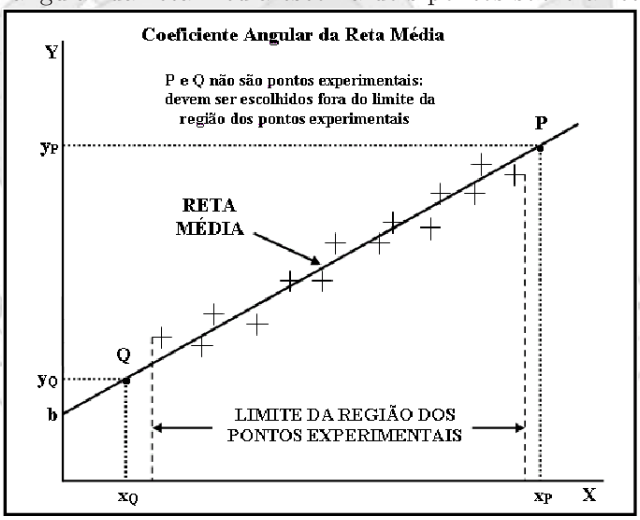


Figura 12: Coeficiente angular da reta média.

P e Q devem ser marcados fora da região delimitada pelos pontos experimentais, de forma a obter-se m com maior quantidade de algarismos. O coeficiente angular da reta média será dado

por:

$$m = \left(\frac{y_p - y_q}{x_p - x_q} \right)$$

1.11.4 Incerteza do coeficiente angular da reta média

Para estimar a incerteza do coeficiente angular da reta média considere **duas diagonais** do quadrilátero **ABCD** como mostra a figura 13.

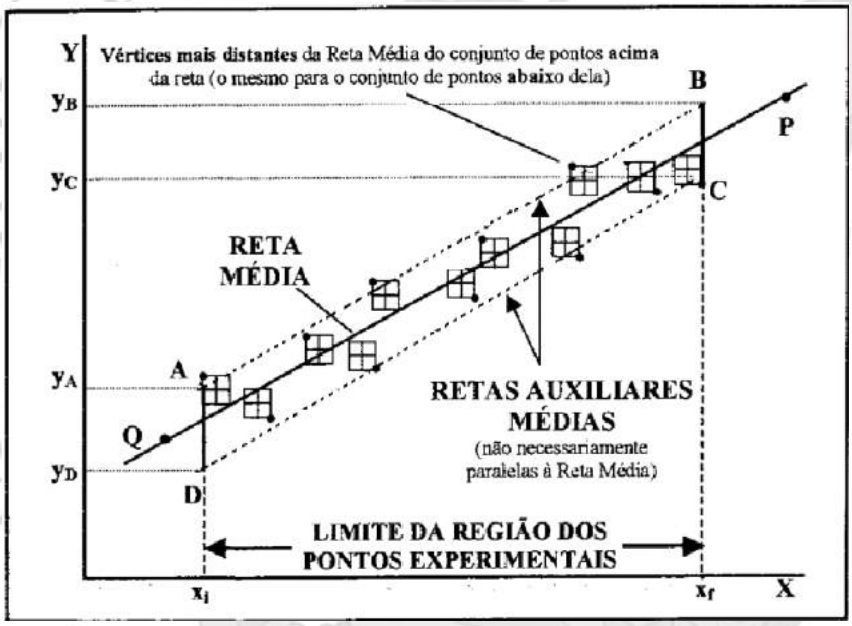


Figura 13: Incerteza do coeficiente angular da reta media.

Para obter os seguimentos de reta **AB** e **CD** proceda da seguinte forma:

1. Assinale em cada janela de incerteza o vértice mais distante da reta média: resultará um conjunto de pontos acima da reta média e outro abaixo.

2. O conjunto de pontos que ficou **acima** da reta média permite traçar **uma reta média auxiliar** e determinar o seguimento **AB pela interseção desta reta com as verticais traçadas por X_i e X_f.** O seguimento **CD** será obtido de forma análoga.

3. Então, calcule $\pm\Delta m$ como a metade da variação dos coeficientes angulares das duas diagonais,

BD e **CA**, do quadrilátero **ABCD.**

$$\pm\Delta m = \frac{1}{2}(m_{pri} - m_{sec}) \quad ,$$

onde $m_{pri} = \left(\frac{y_b - y_d}{x_f - x_i}\right)$ e $m_{sec} = \left(\frac{y_c - y_a}{x_f - x_i}\right)$. Substituindo m_{pri} e m_{sec} na expressão definida para $\pm\Delta m$ teremos:

$$\pm\Delta m = \frac{1}{2}\left(\frac{(y_a - y_d) + (y_b - y_c)}{x_f - x_i}\right)$$

UNIVERSIDADE FEDERAL DO ESPÍRITO SANTO
DOCETE OMNES GENTES

1.12 REFERENCIAS

1. Vuolo, José Henrique. *Fundamentos da teoria de erros.* Ed. Edgard Blücher, São Paulo, SP. 2a Ed. 1996.

2. *Referências Bibliográficas de Multimeios e Documentos Eletrônicos.* Instituto de Física da Universidade de São Paulo.Conceitos Básicos da Teoria de Erros, (2003) 30p.

3. Guide to the Expression of Uncertainty in Measurements e International Vocabulary of Basic and General Terms in Metrology. Traduzido pelo INMETRO, 1994.

4. Diretório Central dos Estudantes. *Normalização de trabalhos acadêmicos & referências bibliográficas.* 2ª. Ed. Pontifícia Universidade Católica de Campinas. - (1998). 52p

5. Frota, Maurício Nogueira, Ohayon, Pierre. eds. *Padrões e Unidades de Medida - Referências Metrológicas da França e do Brasil.* INMETRO - Rio de Janeiro: Qualitymark Ed. 1999. 120p

6. Helene, Otaviano A.M. e Vanin, Vito R. *Tratamento estatístico de dados em física experimental.* Ed. Edgard Blücher, São Paulo, SP. 1981.

7. INMETRO, SBM. *Guia para expressão da incerteza de medição.* ABNT, Rio de Janeiro. (1998). 120p

8. Saad, Fuad Daher, Yamamura, Paulo; Watanabe, Kazuo . *Introdução a interpretação gráfica de dados, gráficos e equações.* 25p. IFUSP (sem data).

9. Yamamura, Paulo e Watanabe, Kazuo *Instrumentos de Medição em Manuais Didáticos de Física.* 18p. IFUSP (sem data).

10. PIACENTINI, J. J.; GRANDI, B. C. S.; HOFMANN, M. P.; LIMA, F. R. R; ZIMMERMANN, E. **Introdução ao laboratório de Física**. Florianópolis: Ed. a UFSC, 3 ed., 2008.